Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ЦЕНТР ДОВУЗОВСКОЙ ПОДГОТОВКИ

ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНЫЙ ЭКЗАМЕН
для учащихся инженерных классов (11 класс) города Москвы

Методические рекомендации
по решению задач теоретической части предпрофессионального экзамена

МАТЕМАТИКА

Авторы: **Власова Е.А.**, к.ф.-м.н., доцент кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана; **Шишкина С.И.**, зам. заведующего кафедрой «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана

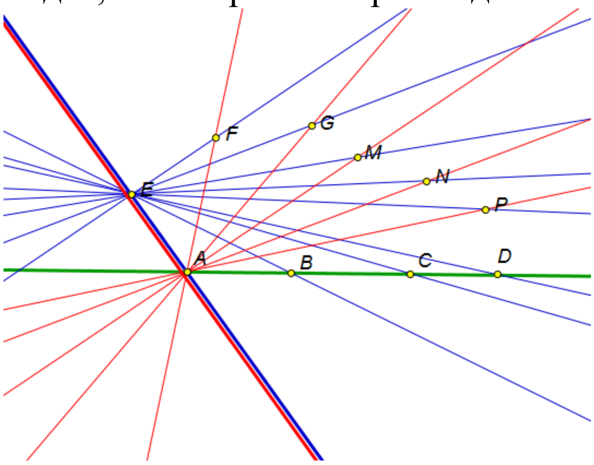
Москва 2017

1. Некоторые логические задачи

Задачу №1 предпрофессионального экзамена можно отнести к логическим задачам. Рассмотрим следующую модельную задачу. Пусть на плоскости даны n точек $(n \geq 3)$, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Сколько всего можно провести прямых, каждая из которых проходит через две из данных точек? Прямую можно рассматривать как неупорядоченную пару точек (прямая AB совпадает с прямой BA). Через любую из n точек можно провести $n-1$ прямую, соединяющую эту точку с остальными $n-1$ точками. Таким образом, получим $(n-1)n$. Поскольку при таком подсчете каждая прямая повторяется два раза, то число прямых будет равно $\dfrac{(n-1)n}{2}$. Задачи, по существу совпадающие с рассмотренной выше, встречаются довольно часто. Например, в шахматном турнире в один круг играют n игроков. Сколько всего они провели встреч? Или другая задача. Встретились n друзей и обменялись рукопожатиями. Сколько всего было рукопожатий?

Задача 1.1.

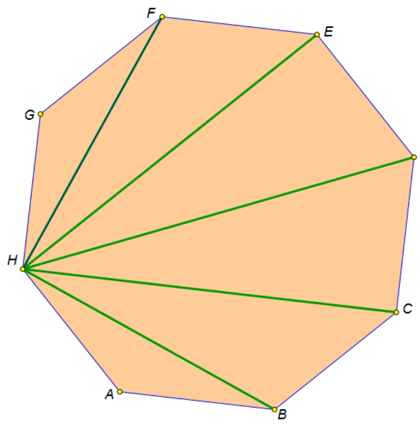
На плоскости даны 10 точек, из которых ровно четыре лежат на одной прямой, а из остальных никакие три не лежат на одной прямой. Сколько всего можно провести прямых, каждая из которых проходит или через две, или через четыре из данных точек?



Решение. Пусть *A, B, C, D* – точки, которые лежат на одной прямой. Тогда через каждую из шести точек, не совпадающих с *A, B, C, D* можно провести 9 прямых. Через каждую из точек *A, B, C, D* можно провести шесть различных прямых, не считая ту, на которой лежат эти четыре точки. С учетом, что каждую из перечисленных прямых посчитали дважды, добавив прямую AB, получаем $(6\cdot 9+4\cdot 6)/2+1=40$.

Задача 1.2.

Сколько всего диагоналей у выпуклого многоугольника, имеющего n сторон?



Решение. Каждую из n вершин выпуклого многоугольника можно соединить диагоналями с $n-3$ другими вершинами. Количество всех диагоналей равно $(n-3)n/2$.

Задача 1.3.

Можно ли 15 телефонов соединить между собой так, чтобы каждый из них был связан ровно с 11 другими?

Решение. Нельзя, поскольку телефонных линий, связывающих между собой эти телефоны, было бы $15 \cdot 11/2$, что не является целым числом.

Задача 1.4. (решение задания 1 демонстрационного варианта)

На соревнованиях беговых роботов было представлено некоторое количество механизмов. Роботов выпускали на одну и ту же дистанцию попарно. В протоколе фиксировались разности времен финиша победителя и побежденного в каждом из забегов. Все они оказались разными: 1 сек., 2 сек., 3 сек., 4 сек., 5 сек., 6 сек. Известно, что в ходе забегов каждый робот соревновался с каждым ровно один раз. Определите число представленных на соревнованиях механизмов.

Решение. Пусть на соревнования было представлено n роботов. Так как для каждой пары роботов показания измерений оказались разными, то всего было 6 различных пар. С другой стороны, число пар которое можно составить из n роботов равно $\frac{(n-1)n}{2}$. Следовательно, $\frac{(n-1)n}{2} = 6,$ или $n^2 - n - 12 = 6,$ $n = 4$. Ответ: 4.

2. Векторы

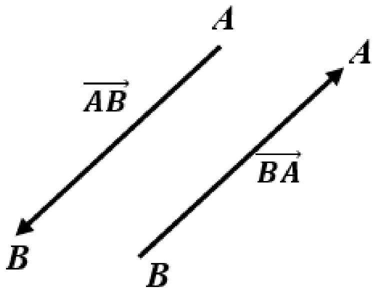
Для успешного решения задания №2 предпрофессионального экзамена необходимо знать основные положения метода координат, понятие вектора, линейные операции над векторами и их свойства, разложение вектора по базису, координаты вектора, скалярное произведение векторов, вычисление скалярного произведения в декартовой системе координат.

Понятие вектора

Во многих разделах математики, механики, физики, технических наук различают величины скалярные и векторные. Величину, для определения которой достаточно задать только ее численное значение, называют ***скалярной.*** Примерами скалярных величин служат длина, площадь, масса, температура, сопротивление и др. Объекты, которые характеризуются не только численным значением, но и направлением в пространстве, называют ***векторными.*** Векторами являются, к примеру, скорость, ускорение, сила, напряженность электрического или магнитного поля и др. Векторную величину можно изобразить направленным отрезком.

Определение. ***Направленным отрезком*** или ***геометрическим вектором*** называют отрезок, концы которого упорядочены. Первый из его концов называют началом, второй – концом. При этом говорят, что указано ***направление*** отрезка.

Для любого отрезка AB можно задать два направления, указав порядок концов, приняв за начало либо точку A, либо B. При этом получают два различных, если точка A не совпадает с B, геометрических вектора. Начало геометрического вектора называют также ***точкой*** его ***приложения***. Обозначение геометрического вектора отражает указанную интерпретацию: если точка A является началом геометрического вектора, а точка B — его концом, то геометрический вектор обозначают $\overline{AB}$ или $\overrightarrow{AB}$. Вектор $\overrightarrow{AB}$ называют ***противоположным*** вектору $\overrightarrow{BA}$.



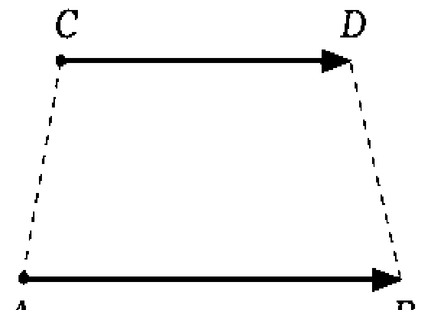
Расстояние между началом и концом вектора $\overrightarrow{AB}$ называют его ***длиной*** или ***модулем*** и обозначают $|\overrightarrow{AB}|$.

Вектор, начало и конец которого совпадают, называется ***нулевым***, его длина равна нулю. Если длина вектора положительна, то его называют ненулевым и обозначают $\vec{0}$. Направление нулевого вектора, естественно, не определено.

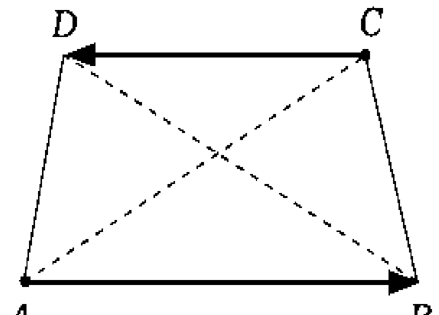
Если длина геометрического вектора равна единице, то его называют ***ортом*** или ***единичным***.

Определение. Два геометрических вектора называют ***коллинеарными***, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Обозначают коллинеарные векторы $\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CD}$. Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Два ненулевых коллинеарных геометрических вектора называют ***однонаправленными*** или ***сонаправленными***, если они принадлежат параллельным прямым и их концы лежат в одной полуплоскости от прямой, проходящей через их начала; либо, если векторы принадлежат одной прямой, и луч, определяемый одним вектором, целиком принадлежит лучу, определяемому другим вектором. В противном случае коллинеарные геометрические векторы называют ***противоположно направленными***. Однонаправленные и противоположно направленные векторы обозначаются парами стрелок $\uparrow\uparrow$ и $\uparrow\downarrow$ соответственно. Понятия коллинеарных, одинаково направленных векторов распространяются на любое число векторов.



$\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$



$\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$

Определение. Три геометрических вектора называют ***компланарными***, если эти векторы лежат на прямых, параллельных некоторой плоскости.

Заметим, что любые два вектора всегда компланарны. Можно говорить о компаланарности четырех векторов или об их большем числе.

Определение. Два геометрических вектора называют ***равными***, если эти векторы имеют одинаковую длину и являются однонаправленными.

Отметим, что равные геометрические векторы могут иметь разные точки приложения, но являются однонаправленными векторами одинаковой длины.

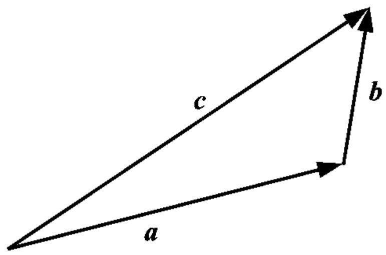
Определение. ***Свободным вектором*** или просто ***вектором*** называют множество всех равных геометрических векторов.

Векторы обозначают одной строчной буквой с дополнительной чертой или стрелкой вверху: $\bar{a}$ или $\vec{a}$, в литературе можно встретить обозначение вектора полужирным шрифтом $\boldsymbol{a}$.

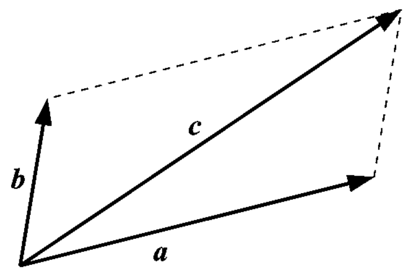
Линейные операции над векторами и их свойства

К линейным операциям относятся операции сложения и вычитания векторов, умножение вектора на число. Рассматривать будем лишь свободные векторы. Напомним два правила ***сложения векторов***. Пусть даны три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

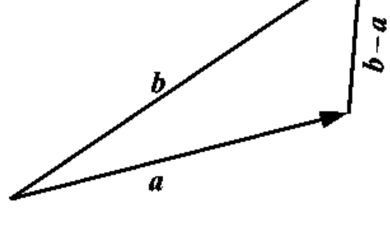
а) **Правило треугольника.** От произвольно выбранной точки откладываем вектор, равный вектору $\vec{a}$; от его конца откладываем вектор, равный вектору $\vec{b}$; строим вектор, начало которого совпадает с началом первого вектора, а конец – с концом второго вектора, это и есть вектор $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$. Аналогично получается сумма любого конечного числа векторов.



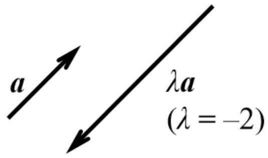
б) **Правило параллелограмма.** От произвольно выбранной точки откладываем оба вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$; на этих двух векторах, как на сторонах, строим параллелограмм. Направленная диагональ этого параллелограмма, выходящая из общего начала векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ представляет вектор $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$.



Разностью векторов $\vec{b}$ и $\vec{a}$ называют вектор $\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$, такой, что $\vec{b} = \vec{a} + \vec{c}$. Заметим, что вектор $-\vec{a}$ является противоположным вектору $\vec{a}$. Практически для вычисления разности векторов можно воспользоваться правилом треугольника. Совместим начала векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, тогда вектор $\vec{c}$ с началом в конце вектора $\vec{a}$ и концом, совпадающим с концом $\vec{b}$, равен разности $\vec{b} - \vec{a}$ этих векторов. Операцию вычитания векторов также относят к линейным, так как она определяется операцией сложения и является обратной сложению.



Произведением вектора а на число λ называют вектор $\lambda\,\vec{a}$, коллинеарный вектору $\vec{a}$, имеющий длину $|\lambda|\cdot|\vec{a}|$, направленный так же, как вектор $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположно, если $\lambda < 0$.



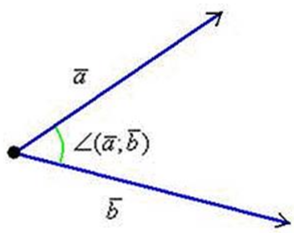
Свойства линейных операций над векторами:

- Сложение коммутативно: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
- Сложение ассоциативно: $\vec{a} + (\vec{b} + \overrightarrow{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.
- $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.
- Умножение вектора на число ассоциативно: $(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a})$.
- Дистрибутивность: $(\lambda_1 + \lambda_2)\vec{a} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{a}$.
- Дистрибутивность: $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$.
- $1\cdot\vec{a} = \vec{a}$.
- Вектор $-\vec{a}$, противоположный вектору $\vec{a}$, можно представить в виде: $-\vec{a} = (-1)\cdot\vec{a}$.

Угол между прямыми в пространстве. Угол между векторами

Углом между параллельными прямыми полагают равным нулю. Углом между пересекающимися прямыми называют величину наименьшего из плоских углов, образованных этими прямыми. Углом между скрещивающимися прямыми называют угол между пересекающимися прямыми, параллельными данным скрещивающимся прямым.

Углом между двумя ненулевыми геометрическими векторами $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ с общим началом называют угловую величину наименьшего из плоских углов, образованных лучами OA и OB. Если хотя бы один из векторов нулевой, то угол между ними не определяют.



Определение. ***Углом*** между двумя ***векторами*** называют угол между изображающими их геометрическими векторами, отложенными от одной точки пространства, при этом для угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ используют обозначение $\angle(\vec{a}, \vec{b})$.

Разложение вектора по базису

Базисом на плоскости называют любую упорядоченную пару неколлинеарных векторов. Любой вектор на плоскости может быть однозначно ***разложен по базисным,*** т.е. для любого вектора $\vec{c}$ на плоскости α существуют и единственные такие числа λ_1 и λ_2, что $\vec{c} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b}$, если пара векторов $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ является базисом на плоскости α.

Теорема. Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ — некомпланарные векторы. Тогда для любого вектора $\vec{d}$ существует единственная тройка таких чисел λ_1, λ_2 и λ_3, что $\vec{d} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} + \lambda_3\vec{c}$.

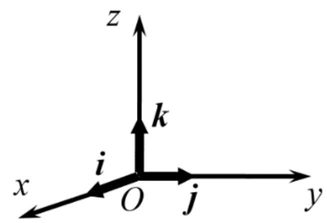
Определение. ***Базисом в пространстве*** называют любую упорядоченную тройку некомпланарных векторов.

Базис из векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ обозначают $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$. Из сформулированной выше теоремы следует, что любой вектор в пространстве может быть однозначно ***разложен по базисным.***

Определение. Коэффициенты λ_1, λ_2 и λ_3 в разложении $\vec{d} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} + \lambda_3\vec{c}$ называют координатами вектора $\vec{d}$ в базисе $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$. При этом пишут $\vec{d} = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$.

Координатное представление векторов

Определение. ***Декартовой системой координат*** в пространстве называют совокупность точки и базиса. Точку обычно обозначают буквой *O* и называют началом координат. Прямые, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов, называют осями координат. Плоскости, проходящие через оси координат, называют координатными плоскостями.



Определение. Декартову систему координат называют ***прямоугольной***, если все ее базисные векторы попарно перпендикулярны и их модули равны единице. Для векторов такого базиса вводят специальные обозначения: ***i***, ***j***, ***k***, а сам базис называют ***ортонормированным.***

Направление векторов ***i***, ***j***, ***k*** выбирают совпадающим с направлением осей *Ox*, *Oy*, *Oz*, так что эти базисные векторы являются ортами осей декартовой прямоугольной системы координат.

Итак, любой вектор $\vec{a}$ пространства может быть разложен по базису $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$:

$\vec{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$,

где a_x, a_y, a_z – координаты вектора $\vec{a}$ в этом базисе. Обратим внимание на то, что эти координаты являются проекциями вектора $\vec{a}$ на координатные оси *Ox*, *Oy*, *Oz* соответственно. Можно записать также $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$.

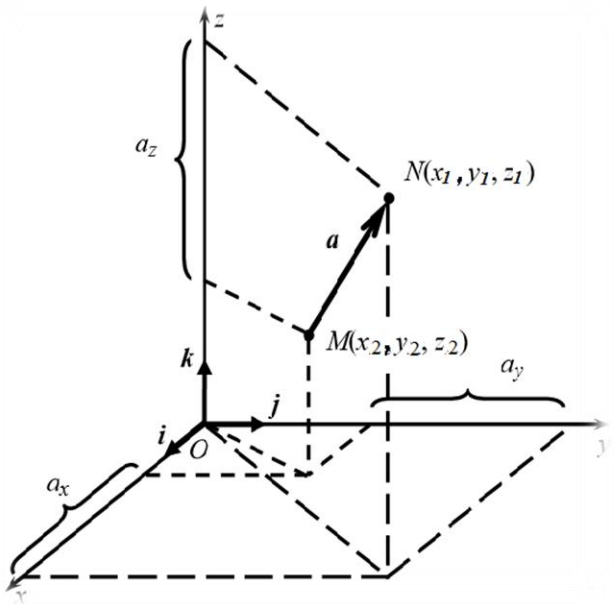
Определение. ***Радиус-вектором точки*** *A* (*x*, *y*, *z*) называют вектор $\overrightarrow{OA}$. Его координаты совпадают с координатами точки *A*: $\overrightarrow{OA} = \{x, y, z\}$.

Теорема. Если вектор $\vec{a} = \overrightarrow{MN}$, причем $M(x_1, y_1, z_1)$, $N(x_2, y_2, z_2)$, то координаты a_x, a_y, a_z вектора $\vec{a}$ находят по формулам:

$$a_x = x_2 - x_1,\ a_y = y_2 - y_1,\ a_z = z_2 - z_1. \qquad (2.3.1)$$

Длину вектора $\vec{a}$ вычисляют по формуле:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \qquad (2.3.2)$$



Из свойств линейных операций над векторами следует теорема.

Теорема. При сложении векторов $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ и $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$ их соответствующие координаты складываются:

$$\vec{a} + \vec{b} = \{a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z\}. \qquad (2.3.3)$$

При умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число:

$$\lambda\vec{a} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}. \qquad (2.3.4)$$

Следствие. Два ненулевых вектора $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ и $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$ являются коллинеарными тогда и только тогда, когда найдется такое число λ, что $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, или в координатной форме $\frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z} = \lambda$, т.е. соответствующие координаты коллинеарных векторов пропорциональны.

В базисе $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ каждый вектор $\vec{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$ однозначно определяется упорядоченной тройкой чисел $\{a_x, a_y, a_z\}$. Итак, вектором можно считать тройку чисел $\{a_x, a_y, a_z\}$, причем также, как и векторы эти тройки можно складывать и умножать на числа. Вектор $\boldsymbol{i}$ представляет тройка чисел $\{1, 0, 0\}$, соответственно $\boldsymbol{j}$ — $\{0, 1, 0\}$, $\boldsymbol{k}$ — $\{0, 0, 1\}$.

Понятие скалярного произведения векторов

Определение. ***Скалярным произведением двух векторов*** $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними, и обозначают символом $\vec{a} \cdot \vec{b}$ или $(\vec{a}, \vec{b})$. Если угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен φ, то имеем формулу

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi. \qquad (2.3.5)$$

Если хотя бы один из двух векторов является нулевым, то их скалярное произведение считают равным нулю.

Скалярное произведение обладает следующими **основными свойствами:**

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (свойство коммутативности);

2) $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2 \geq 0$, $\vec{a}\cdot\vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$ ($\vec{a}^{\,2} = \vec{a}\cdot\vec{a}$ называют ***скалярным квадратом вектора***);

3) $(\vec{a}+\vec{b})\,\vec{c}= \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}$ (свойство дистрибутивности операции умножения на число);

4) $\overrightarrow{\lambda a}\cdot\vec{b} = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$ (свойство ассоциативности).

Замечание. Из свойств 1, 3, 4 скалярного умножения и свойств линейных операций над векторами следует, что векторы можно перемножать скалярно как многочлены.

Используя свойство 2, получаем формулу для нахождения длины вектора

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}.$$

Из равенства (1) следует, что косинус угла φ между двумя ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}.$$

Если угол между двумя ненулевыми векторами прямой (т.е. равен 90◦), то такие векторы называют ***ортогональными***. Нулевой вектор считают ортогональным любому другому вектору.

Теорема. Для того чтобы два вектора были ортогональны, необходимо и достаточно, чтобы их скалярное произведение равнялось нулю.

Это утверждение справедливо также и в том случае, когда хотя бы один из векторов $\vec{a}$ или $\vec{b}$ нулевой (нулевой вектор не имеет направления и его можно считать ортогональным любому вектору).

Вычисление скалярного произведения в декартовой системе координат

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами в ортонормированном базисе $\{\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\ \}$: $\vec{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$, $\vec{b}=\{b_x, b_y, b_z\}$. Это означает, что имеются разложения:

$$\vec{a}=a_x\boldsymbol{i} + a_y\,\boldsymbol{j} + a_z\,\boldsymbol{k},\ \ \vec{b}=b_x\boldsymbol{i} + b_y\,\boldsymbol{j} + b_z\,\boldsymbol{k}.$$

Используя их и свойства скалярного произведения приходим к формуле

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z. \qquad (2.3.6)$$

Получаем следующий критерий ортогональности (перпендикулярности) двух векторов:

$$\angle(\vec{a},\vec{b})=90° \Leftrightarrow\ \ a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = 0.$$

Длину вектора $\vec{a}$ можно находить по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}.$$

Вычислить косинус угла между ненулевыми векторами можно по формуле

$$\cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{{a_x}^2+{a_y}^2+{a_z}^2}\cdot\sqrt{{b_x}^2+{b_y}^2+{b_z}^2}}, \qquad (2.3.7)$$

где φ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Решение типовых задач

Задача 2.1.

Даны точки A (1; 5; 3), B (1; 2; –3) и C (1; 1; 0). Найдите координаты вектора $\vec{m} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$ и запишите в ответ их сумму.

Решение. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$, используя формулу (2.3.1): $\overrightarrow{AB} = \{1-1, 2-5, -3-3\} = \{0, -3, -6\}$, $\overrightarrow{BC} = \{1-1, 1-2, 0-(-3)\} = \{0, -1, 3\}$. Согласно формулам (2.3.3) и (2.3.4), имеем $\vec{m} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} = \{0 + 3\cdot 0,\ (-3) + 3\cdot(-1),\ (-6) + 3\cdot 3\} = \{0, -6, 3\}$

Сумма координат вектора $\vec{m}$ равна -3. Ответ: -3.

Задача 2.2.

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами в ортонормированном базисе: $\vec{a}$=$\{-3, -1, 1\}$, $\vec{b}$=$\{-5, 0, 3\}$. Найдите длину вектора $\vec{m} = \vec{a} - \vec{b}$.

Решение. Найдем координаты вектора $\vec{m} = \vec{a} - \vec{b}$, используя формулу (2.3.3): $\vec{m} = \{-3-(-5), -1-0, 1-3\} = \{2, -1, -2\}$. Согласно формуле (2.3.2) имеем $|\vec{m}| = \sqrt{\vec{m}\cdot\vec{m}} = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = 3$. Ответ: 3.

Задача 2.3.

Даны точки A (1; 1; –3), B (2; 2; –1) и C (1; 1; 1). Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CA}$.

Решение. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CA}$, используя формулу (2.3.1): $\overrightarrow{AB} = \{2-1, 2-1, -1-(-3)\} = \{1, 1, 2\}$, $\overrightarrow{CA} = \{1-1, 1-1, -3-1\} = \{0, 0, -4\}$. Согласно формуле (2.3.6), имеем $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA} = 1\cdot 0 + 1\cdot 0 + 2\cdot(-4) = -8$. Ответ: -8.

Задача 2.4.

Даны точки A (1; –1; –3), B (–1; 1; –2) и C (3; 4; –2). Найдите косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CB}$.

Решение. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CB}$, используя формулу (2.3.1): $\overrightarrow{AB} = \{-1-1, 1-(-1), -2-(-3)\} = \{-2, 2, 1\}$, $\overrightarrow{CB} = \{-1-3, 1-4, -2-(-2)\} = \{-4, -3, 0\}$. Согласно формуле (2.3.7), находим косинус угла φ между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CB}$

$\cos\varphi = \frac{(-2)\cdot(-4)+2\cdot(-3)+1\cdot 0}{\sqrt{(-2)^2+2^2+1^2}\cdot\sqrt{(-4)^2+(-3)^2+0^2}} = \frac{2}{15}$. Ответ: $\frac{2}{15}$.

Задача 2.5.

Найдите длину вектора $\vec{a} = 3\vec{c} - 2\vec{b}$ при условии, что $|\vec{c}| = 5$, $|\vec{b}| = 4$, а угол φ между векторами $\vec{c}$ и $\vec{b}$ равен 60°.

Решение. Поскольку $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$, то, вычислим скалярный квадрат вектора $\vec{a}$, пользуясь формулой (2.3.5) и основными свойствами скалярного произведения. Имеем $\vec{a}^2 = (3\vec{c} - 2\vec{b})(3\vec{c} - 2\vec{b}) = 9\vec{c}^2 - 12\vec{c} \cdot \vec{b} + 4\vec{b}^2 = 9|\vec{c}|^2 - 12|\vec{c}||\vec{b}|\cos\varphi + +4|\vec{b}|^2 = 9 \cdot 25 - 12 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 0{,}5 + 4 \cdot 16 = 225 - 120 + 64 = 169$. Следовательно, $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = 13$.
Ответ: 13.

Задача 2.6. (решение задания 2 демонстрационного варианта)

Студент написал программу, в которой исполнитель **Прыгун** может совершать прыжки двух типов. Так, стартовав из точки A (1; 6; 3) прыжком первого типа, **Прыгун** попадает в точку B (1; 2; – 3), а из точки B прыжком второго типа попадает в точку C (1; 0; – 7). Найдите модуль перемещения **Прыгуна**, последовательно совершившего два прыжка первого типа и прыжок, противоположный прыжку второго типа.

Решение. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$, используя формулу (2.3.1): $\overrightarrow{AB} = \{1 - 1, 2 - 6, -3 - 3\} = \{0, -4, -6\}$, $\overrightarrow{BC} = \{1 - 1, 0 - 2, -7 - (-3)\} = \{0, -2, -4\}$. Согласно формулам (2.3.3) и (2.3.4), рассчитаем вектор перемещения **Прыгуна** $\vec{m} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \{2 \cdot 0 - 0,\ 2 \cdot (-4) - (-2),\ 2 \cdot (-6) - (-4)\} = \{0, -6, -8\}$. Используя формулу (2.3.2), получаем $|\vec{m}| = \sqrt{\vec{m} \cdot \vec{m}} = \sqrt{0^2 + (-6)^2 + (-8)^2} = 10$. Ответ: 10

3. Использование свойств функций при решении задач

Для успешного решения задания №3 необходимо знать свойства основных элементарных функций и их графики, уметь решать рациональные, иррациональные, показательные и логарифмические уравнения, используя свойства монотонности функций.

Функцию $f(x)$ называют **возрастающей** на промежутке D, если для любых чисел x_1 и x_2 из промежутка D таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Функцию $f(x)$ называют **убывающей** на промежутке D, если для любых чисел x_1 и x_2 из промежутка D таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

Если функция возрастает или убывает на некотором промежутке, то ее называют строго монотонной на этом промежутке.

Решение уравнений с помощью монотонности функций позволяет быстро и просто найти корень уравнения (либо доказать, что уравнение корней не имеет). Использование возрастания и убывания функций при решении уравнений опирается на следующие теоремы:

1) **Если на некотором промежутке функция $f(x)$ возрастает (или убывает), то уравнение $f(x) = a$ на этом промежутке имеет единственный корень, либо не имеет корней (a — постоянная величина (число)).**
2) **Если на некотором промежутке функция $f(x)$ возрастает, а функция $g(x)$ убывает (либо наоборот), то уравнение $f(x)=g(x)$ на этом промежутке имеет единственный корень, либо не имеет корней.**

Доказав, что уравнение имеет на промежутке не более чем один корень, можно попытаться определить его подбором.

Если функция имеет несколько промежутков возрастания и убывания, каждый из них следует рассмотреть отдельно.

Перечислим свойства монотонных функций (предполагается, что все функции определены на некотором промежутке D).

- Сумма возрастающих функций — возрастающая функция. Сумма убывающих функций — убывающая функция.
- Прибавление или вычитание постоянной величины не влияет на монотонность функции. Если к возрастающей функции прибавить (или вычесть) постоянную величину, получим возрастающую функцию. Если к убывающей функции прибавить (или вычесть) постоянную величину, получим убывающую функцию.
- Если функция f возрастает, то функция cf ($c > 0$) также возрастает, а функция cf ($c < 0$) убывает. Если функция f убывает, то функция cf ($c > 0$) также убывает, а функция cf ($c < 0$) возрастает. Здесь c – некоторая константа.
- Произведение неотрицательных возрастающих функций есть возрастающая функция. Произведение неотрицательных убывающих функций есть убывающая функция.
- Если функция f возрастает и сохраняет знак, то функция $1/f$ убывает.
- Если функция f возрастает (убывает) и n – нечетное число, то f^n также возрастает (убывает).
- Композиция $g(f(x))$ возрастающих функций f и g также возрастает.
- Композиция $g(f(x))$ убывающих функций f и g возрастает.
- Композиция $g(f(x))$ возрастающей функций f и убывающей g убывает.
- Композиция $g(f(x))$ убывающей функций f и возрастающей g убывает.

Перечислим некоторые элементарные функции, возрастающие на всей области определения, либо на отдельных промежутках, входящих в область определения (k>0, b≥0, n — натуральное число):

$y = kx \pm b, y = -\frac{k}{x}, y = -\frac{k}{x^{2n+1}},$

$y = x^3, y = x^{2n+1},$

$y = a^x (a > 1), y = \log_a x (a > 1),$
$y = -a^x (0 < a < 1), y = -\log_a x (0 < a < 1),$
$y = \sqrt{kx \pm b}, y = -\sqrt{b - kx},$
$y = \sqrt[n]{kx \pm b},\ y = -\sqrt[n]{b - kx},$
$y = tgx, y = arctgx, y = \arcsin x,$
$y = -ctgx, y = -arcctgx, y = -\arccos x.$

Некоторые функции, убывающие на всей области определения, либо на отдельных промежутках, входящих в область определения (k>0, b≥0, n — натуральное число):

$y = -kx \pm b, y = \frac{k}{x}, y = \frac{k}{x^{2n+1}},$
$y = -x^3, y = -x^{2n+1},$
$y = a^x (0 < a < 1), y = \log_a x (0 < a < 1),$
$y = -a^x (a > 1), y = -\log_a x (a > 1),$
$y = \sqrt{b - kx}, y = -\sqrt{kx \pm b},$
$y = -\sqrt[n]{kx \pm b},\ y = \sqrt[n]{b - kx},$
$y = ctgx, y = arcctgx, y = \arccos x,$
$y = -tgx, y = -arctgx, y = -\arcsin x.$

Задача 3.1.

Решите уравнение: $x^3 = 2 - x$.

Решение. Рассмотрим функции $f(x)=x^3$ и $g(x)=2 - x$. Функция $f(x)$ *возрастает* на всей области определения, а функция $g(x)$ *убывает* на области определения. Следовательно, данное уравнение имеет не более одного корня. Подбором находим, что $x = 1$. Проверкой убеждаемся, что $x = 1$ действительно корень уравнения.

Ответ: 1.

Задача 3.2.

Решите уравнение: $\sqrt{x^3+24} = 3x + 8 + \sqrt{x^3+12}.$

Решение. Перепишем уравнение в виде $\sqrt{x^3 + 24} - \sqrt{x^3 + 12} = 3x + 8$. Умножим и разделим левую часть уравнения на сопряженное до разности квадратов, получим

$$\frac{12}{\sqrt{x^3+24}+\sqrt{x^3+12}} = 3x+8$$

Заметим, что левая часть есть *убывающая* функция, а правая – *возрастающая*, значит, уравнение не может иметь более одного корня. Подбором находим: $x = -2$. Ответ: – 2.

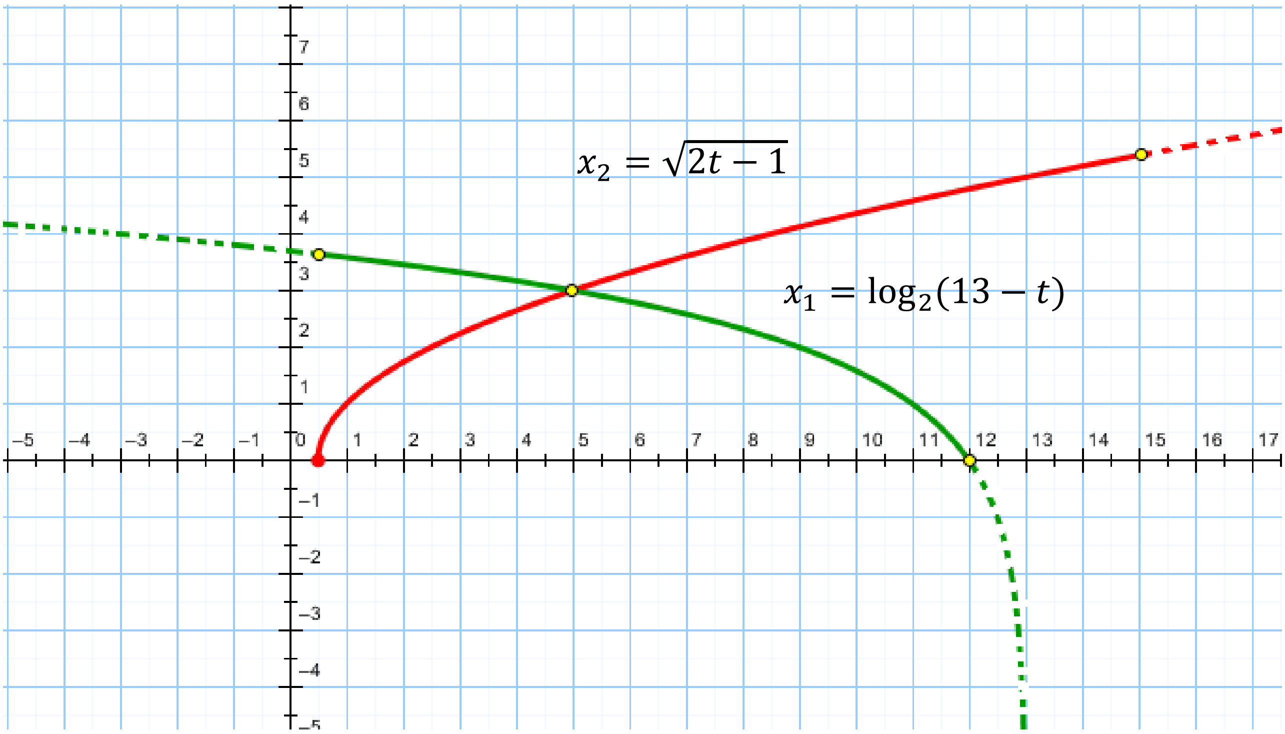
Задача 3.3. (решение задания 3 демонстрационного варианта)

При изучении характера движения тел на экспериментальной установке студент получил данные по изменению координат для двух частиц, движущихся вдоль оси Ox, и записал их в таблицу:

	Время начала движения, с	Продолжительность движения, с	Закон изменения координаты (время отсчитывается от начала движения первой частицы)
Первая частица	0	12	$x_1 = \log_2(13 - t)$
Вторая частица	0,5	15	$x_2 = \sqrt{2t - 1}$

Через какое время после начала движения первой частицы можно прогнозировать встречу частиц? В точке с какой координатой они должны встретиться?

Решение. Для нахождения времени встречи частиц необходимо решить уравнение $\log_2(13 - t) = \sqrt{2t - 1}$. Областью допустимых значений уравнения является временной промежуток $[0{,}5; 12]$, что соответствует условию задачи. Функция $x_1 = \log_2(13 - t)$ убывает на этом промежутке, поскольку является композицией убывающей линейной и возрастающей логарифмической функций. Функция $x_2 = \sqrt{2t - 1}$ возрастает на этом промежутке, поскольку является композицией двух возрастающих функций. Множеством значений непрерывной функции $x_1 = \log_2(13 - t)$, определенной на отрезке $[0{,}5; 12]$, является отрезок $[0; \log_2 12{,}5]$. Множеством значений непрерывной функции $x_2 = \sqrt{2t - 1}$, определенной на отрезке $[0{,}5; 12]$, является отрезок $[0; \sqrt{23}]$. Каждая из функций всякое свое значение принимает только один раз. Таким образом, уравнение $\log_2(13 - t)$=$\sqrt{2t - 1}$ на отрезке $[0{,}5; 12]$ имеет и притом единственное решение. Методом подбора определяем это решение: $t = 5$, при этом координата точки встречи частиц $x = 3$.



Ответ:

Время встречи	Координата точки встречи
5	3

4. Экстремальные задачи

Задание №4 предпрофессионального экзамена проверяет умение проводить экстремальные оценки. Задачи на нахождение наибольшего и наименьшего значения величин обычно называют задачами на нахождение экстремумов или задачами на оптимизацию. Такие задачи общепризнано являются важными как для самой математики и ее приложений, так и для практической деятельности человека. В жизни постоянно приходится сталкиваться с необходимостью принять наилучшее (оптимальное) решение. Огромное число подобных проблем возникает в физике и других областях естествознания, в технике, в экономике. К такому типу задач и относится задание №4.

Для успешного решения задания №4 необходимо с помощью алгебраических преобразований уметь находить наименьшее или наибольшее значение функции, зависящей от нескольких переменных (параметров).

Решение экстремальных задач без применения производной

При решении экстремальных задач без применения производной наиболее часто используется прием ***выделения полного квадрата***. В основе этого метода лежат следующие формулы сокращенного умножения

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Выражения $(a+b)^2$ и $(a-b)^2$ называют полными квадратами.

Пусть дан квадратный трехчлен ax^2+bx+c, где $a \neq 0$. Его требуется преобразовать к виду $a(x+m)^2+n$, где m и n - некоторые числа. Этот прием и называют выделением полного квадрата. Для этого проведем следующие преобразования

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2 + 2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c =$$

$$= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c.$$

Задача 4.1.

Пусть a, b – произвольные действительные числа. Какое наибольшее значение может принимать выражение $6 - 4a^2 - 2b^2 - 8a + 2b$?

Решение. Приведем данное выражение к виду $6-(4a^2+8a)-(2b^2-2b)$, заключив в скобки одночлены, содержащие одинаковые буквы. В каждом выражении в скобках выделим полный квадрат:

$$4a^2+8a=4(a^2+2a+1-1)=4(a+1)^2-4,$$

$$2b^2-2b=2\left(b^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot b+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)=2\left(b-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}.$$

Таким образом,

$$6-(4a^2+8a)-(2b^2-2b)=6-4(a+1)^2+4-2\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}=$$

$$=10{,}5-4(a+1)^2-2\left(b-\frac{1}{2}\right)^2\le 10{,}5,$$

Последняя оценка следует из неравенств $4(a+1)^2\ge 0$ и $2\left(b-\frac{1}{2}\right)^2\ge 0$, которые выполняются для любых действительных чисел a и b. Причем равенство достигается при $a=-1$ и $b=0{,}5$. Ответ: 10,5.

Задача 4.2. (решение задания 4 демонстрационного варианта)

В логистике затраты на доставку некоторого оборудования складываются из затрат на транспорт и хранение, которые определяются факторами a и b. Эти факторы могут принимать любые неотрицательные значения. Какие наименьшие затраты можно заложить на доставку оборудования по полученному заказу, если зависимость этих затрат задается формулой $2a^2+4b^2-2a+5$? Чему при этом равно значение факторов?

Решение. Для решения задачи необходимо найти наименьшее значение выражения $2a^2+4b^2-2a+5$ при неотрицательных значениях переменных a и b. Для этого воспользуемся методом выделения полного квадрата:

$$2a^2+4b^2-2a+5=2a^2-2a+4b^2+5=2\left(a^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot a+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)+4b^2+5=$$

$$=2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}+4b^2+5=2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+4b^2+4{,}5\ge 4{,}5,$$

причем равенство достигается при $a=0{,}5$ и $b=0$.

Ответ:

Наименьшие затраты	Значение фактора транспорта	Значение фактора хранения
4,5	0,5	0

Задача 4.3.

Найдите наибольшее значение функции $y=\log_7(13-12x-x^2)+10.$

Решение. Используя метод выделения полного квадрата, преобразуем выражение $\log_7(13-12x-x^2)+10=\log_7(49-36-2\cdot 6x-x^2)=\log_7(49-(x+6)^2)$. Поскольку для любых действительных значений x верно неравенство $(x+6)^2\geq 0$, то $49-(x+6)^2\leq 49$. Логарифмическая функция с основание большим единицы (основание равно 7) возрастает в области определения, и, следовательно, $\log_7(49-(x+6)^2)\leq\log_7 49=2$, и $\log_7(49-(x+6)^2)+10\leq 12$ для всех допустимых значений x . Таким образом. Наибольшее значение функции $y=\log_7(13-12x-x^2)+10$ равно 12, причем достигается это значение при $x=-6$. Ответ: 12.

Задача 4.4.

Найдите множество значений функции $f(x)=\log_9\left(3-\left|2^{1-x^2+2x}-2\right|\right)$.

Решение. Функция $t=1-x^2+2x$ или $t=2-(x-1)^2$ принимает значения $t\in(-\infty;2]$. Функция $z=2^t$, где $t\in(-\infty;2]$ возрастает и принимает значения $z\in(0;4]$. Рассмотрим функцию $y=\log_9(3-|z-2|)$, определенную на полуинтервале $(0;4]$. Если $z\in(0;2]$, то $y=\log_9(1+z)$, и функция возрастает и принимает все значения из промежутка $(0;0{,}5]$. Если $z\in(2;4]$, то $y=\log_9(5-z)$, и функция убывает и принимает все значения из промежутка $[0;0{,}5)$. Объединяя полученные множества значений, получаем $E_f=[0;0{,}5]$. Ответ: $E_f=[0;0{,}5]$.

Задача 4.5.

Найдите множество значений функции $f(x)=25\cdot 0{,}2^{(2-\log_7 x)\log_7 x}$.

Решение. Сделаем замену переменного: $t=\log_7 x$. Тогда имеем $y=25\cdot 0{,}2^{(2-t)t}=125\cdot 0{,}2^{1-(t-1)^2}$. Пусть $z=1-(t-1)^2\Rightarrow z\in(-\infty;1]$. Так как показательная функция с основанием $0{,}2<1$ убывает, и $y=25\cdot 0{,}2^z$, $z\in(-\infty;1]$, то $y\in[25\cdot 0{,}2;+\infty)=[5;+\infty)$. Ответ: $E(y)=[5;+\infty)$.

Решение экстремальных задач с применением производной

Точку x_0 называют ***точкой минимума*** функции f , если существует такой интервал $(a;b)$, содержащий x_0 ($x_0\in(a;b)$), что для всех $x\in(a;b)$ выполнено неравенство $f(x)\geq f(x_0)$.

Точку x_0 называют ***точкой максимума*** функции f , если существует такой интервал $(a;b)$, содержащий x_0 ($x_0\in(a;b)$), что для всех $x\in(a;b)$ выполнено неравенство $f(x)\leq f(x_0)$.

Точки максимума и минимума называют ***точками экстремума***, а значения функции в этих точках – ***экстремумами функции***.

Внутренние точки области определения функции, в которых ее производная равна нулю или не существует, называют ***критическими точками*** этой функции.

Необходимый признак экстремума. Если точка x_0 является точкой экстремума функции f и в этой точке существует производная f', то она равна нулю: $f'(x_0)=0$.

Признак максимума функции. Если функция f непрерывна в точке x_0, а $f'(x)>0$ в некотором интервале $(a;x_0)$ и $f'(x)<0$ в некотором интервале $(x_0;b)$, то точка x_0 является точкой максимума функции f.

Признак минимума функции. Если функция f непрерывна в точке x_0, а $f'(x)<0$ в некотором интервале $(a;x_0)$ и $f'(x)>0$ в некотором интервале $(x_0;b)$, то точка x_0 является точкой максимума функции f.

Известно, что непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция f принимает на этом отрезке ***наибольшее и наименьшее значения***, т.е. существуют точки отрезка $[a;b]$, в которых f принимает наибольшее и наименьшее на $[a;b]$ значения. Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции, имеющей на отрезке конечное число критических точек, нужно вычислить значения функции во всех критических точках и на концах отрезка, а затем из полученных чисел выбрать наибольшее и наименьшее.

Задача 4.6.

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=12x-9x^2+2x^3$ на промежутке [0; 2].

Решение. В любой точке отрезка [0; 2] функция $f(x)=12x-9x^2+2x^3$ имеет производную $f'(x)=12-18x+6x^2$.

Найдем нули производной $x^2-3x+2=0, \quad x=1, \quad x=2$. Обе точки принадлежат отрезку [0; 2]. Находим значения функции f в нулях производной и на концах отрезка: $f(0)=0, \quad f(1)=5, \quad f(2)=4.$ Выбираем наибольшее и наименьшее значения: $y_{наиб}=5, \quad y_{наим}=0.$ Ответ: $y_{наиб}=5, \quad y_{наим}=0.$

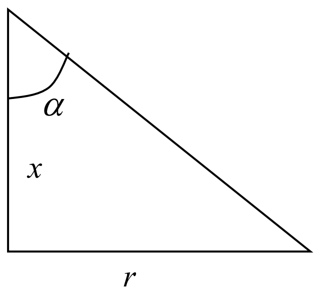
Задача 4.7.

На какой высоте нужно установить фонари, чтобы как можно лучше осветить улицу, если расстояние между соседними фонарями 30м?

Решение. Из курса физики известно, что освещенность плоскости обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света и прямо пропорциональна косинусу угла падения α:

$$f(x)=\frac{(k\cos\alpha)}{(x^2+r^2)} \qquad \cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{r^2+x^2}} \qquad f(x)=\frac{kx}{(x^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Исследуем функцию f на наибольшее значение.



Находим производную данной функции:

$$f'(x)=\frac{k(x^2+r^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}(x^2+r^2)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x\cdot kx}{(x^2+r^2)^3}=$$

$$\frac{k(x^2+r^2)^{\frac{3}{2}}-3kx^2(x^2+r^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+r^2)^3}=\frac{k(x^2+r^2-3x^2)}{(x^2+r^2)^{2,5}}=\frac{k(r^2-2x^2)}{(x^2+r^2)^{2,5}}$$

Находим критические точки функции:

$$f'(x)=0 \qquad \Rightarrow \qquad r=2x^2\,; \qquad x=\frac{r}{\sqrt{2}}\approx 0.7r$$

Таким образом, фонари на улице, если расстояние между ними 30м (r = 15), целесообразно установить на высоте 10, 5 м. Ответ: 10,5 м.

Задача 4.8.

Проектируется канал оросительной системы с прямоугольным сечением в 4,5 м^2. Каковы должны быть размеры сечения, чтобы для облицовки стенок и дна пошло наименьшее количество материала?

Решение. Пусть стенки канала имеют длину x м, а дно канала y м, l – длина канала, S – площадь стенок канала. Тогда $xy=4{,}5,\quad y=\dfrac{9}{2x},\ \ S(x)=2lx+ly=l\left(2x+\dfrac{9}{2x}\right).$

Найдем производную: $S'(x)=l\left(2-\dfrac{9}{2x^2}\right)=l\,\dfrac{4x^2-9}{2x^2}=l\,\dfrac{(2x-3)(2x+3)}{2x^2}.$

Решаем уравнение $S'(x)=0.$ Так как $S>0$, и длина канала l - положительное число, то $x=1{,}5.$ Легко убедиться, что при данном x значение S минимально.

Ответ**:** x=1,5 м, y=3 м.

Задача 4.9.

Какова должна быть скорость парохода, чтобы общая сумма расходов на один километр пути была наименьшей, если расходы на топливо за один час пропорциональны квадрату скорости?

Решение. Расходы на 1км пути при эксплуатации парохода состоят из расходов на топливо и других расходов таких, как содержание команды, амортизация и прочие. Ясно, что чем быстрее движется пароход, тем больше расход топлива. Остальные расходы от скорости движения не зависят. Обозначим через S сумму расходов в час, через v скорость судна. Расходы y на 1 км выразятся формулой $y=\dfrac{S}{v}$. По условию имеем $S=kv^2+b$, где k - коэффициент пропорциональности, b - расходы, кроме расходов на топливо. Таким образом, $y=\dfrac{kv^2+b}{v}=kv+\dfrac{b}{v}$. Надо найти значение v, при котором функция $y=kv+\dfrac{b}{v}$ имеет наименьшее значение. Найдем производную

$y' = k - \frac{b}{v^2}$. Определим критические точки, при которых $y' = 0$. Имеем $\frac{kv^2 - b}{v^2} = 0$. При $v = \sqrt{\frac{b}{k}}$ производная меняет знак с минуса на плюс.

Следовательно, общая сумма расходов на 1 километр пути будет наименьшей при $v = \sqrt{\frac{b}{k}}$. Значение коэффициентов b и k определяются из опыта эксплуатации парохода.

5. Текстовые задачи технического содержания

Задание №8 предпрофессионального экзамена проверяет умение решать расчетную задачу с техническим содержанием, проводить расчеты параметров кинематического устройства. Для успешного решения таких задач необходимо уметь строить и исследовать простейшие математические модели, составлять и решать уравнения или их системы.

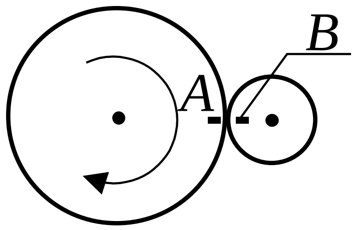
Решение сюжетной задачи алгебраическим методом состоит в последовательной реализации трех этапов:

- перевод текста задачи на алгебраический язык – составление математической модели данной сюжетной задачи;
- решение полученной математической задачи – внутримодельное решение;
- ответ на вопрос задачи, перевод полученного результата на язык исходной ситуации – интерпретация внутримодельного решения.

В школьном курсе математики в основном рассматриваются следующие виды текстовых задач: задачи на движение (на встречное движение, движение в одном направлении, движение в противоположных направлениях, движение по замкнутой траектории), задачи на работу, задачи на смеси и проценты, задачи на пропорциональное деление, задачи с целочисленными неизвестными. В инженерном классе рассматриваются задачи технического содержания, описывающие работу всевозможных механических устройств. Решение таких задач алгебраическим методом не подчиняется какой-либо единой, достаточно универсальной схеме. Такие задачи имеют свои индивидуальные особенности. Поэтому их исследование и решение носят самый разнообразный характер. Рассмотрим некоторые примеры решения задач такого рода.

Задача 5.1. (решение задания 8 демонстрационного варианта)

Две шестерни с радиусами $R_1 = 8$ см и $R_2 = 3$ см находятся в зацеплении друг с другом. Большая из них вращается с угловой скоростью $\omega_1 = 3\pi$ рад/с. В некоторый момент времени метки A и B, поставленные на шестернях совпадают. Определите минимальное время τ (в секундах), через которое метки опять совпадут.

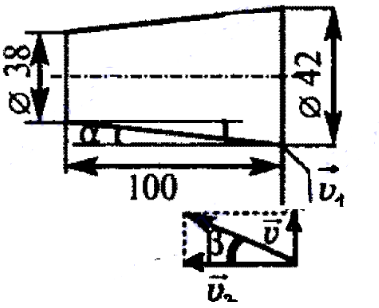


Решение. В данной модели точки A и B за одно и то же время проходят одинаковые расстояния. Совпадение меток на шестернях означает, что точки A и B совершили по нескольку полных кругов, т.е. путь, пройденной точкой A, составляет $S_A = 2\pi R_1 n,\ n \in N,$ путь, пройденной точкой B, составляет $S_B = 2\pi R_2 k,\ k \in N,$ причем $S_A = S_B$. Таким образом, имеем равенство $2\pi \cdot 8n = 2\pi \cdot 3k$, или $8n = 3k$. Для того чтобы время τ (в секундах), через которое метки опять совпадут, было минимальным необходимо, чтобы натуральные числа n и k в равенстве $8n = 3k$ были минимальными. Следовательно, $n = 3,\quad k = 8$ (числа 3 и 8 взаимно просты). Таким образом, $S_A = 2\pi R_1 n = 6\pi R_1 = 48\pi$.

По условию угловая скорость большей шестеренки $\omega_1 = 3\pi$ рад/с . Угловой скоростью при равномерном движении точки по окружности называют отношение угла $\Delta\varphi$ поворота радиус-вектора к промежутку времени Δt, за который этот поворот произошел, т.е. $\omega = \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}$. Если конец радиус-вектора прошел расстояние S , равное длине дуги окружности радиуса R, то угол поворота радиус-вектора будет авен $\Delta\varphi = \dfrac{S}{R}$ рад. Следовательно, верна формула $\omega\Delta t = \dfrac{S}{R}$, или $\Delta t = \dfrac{S}{R\omega}$. Для данной задачи имеем $\Delta t = \dfrac{S_A}{R_1\omega_1} = \dfrac{2\pi R_1 n}{R_1\omega_1} = \dfrac{2\pi n}{\omega_1} = \dfrac{6\pi}{3\pi} = 2$ с. Ответ: 2 с.

Задача 5.2.

На токарном станке вытачивают деталь в форме усеченного конуса. Диаметры оснований конуса равны 38 мм и 42 мм, высота конуса равна 100 мм. Какова должна быть скорость поперечной подачи резца, если скорость продольной подачи 25 см/мин? Ответ дать в см/мин.



Решение. Вектор скорости резца $\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{v_1}} + \vec{\boldsymbol{v_2}}$ всегда направлен по касательной к траектории его движения. Если $|\vec{\boldsymbol{v_1}}| = v_{\text{прод.}}$, $|\vec{\boldsymbol{v_2}}| = v_{\text{попер.}}$, то $\angle\alpha = \angle\beta$, $v_{\text{попер.}} = v_{\text{прод.}} \operatorname{tg}\alpha$, где α – угол наклона образующей конуса к основанию,

$v_{\text{попер.}} = 25 \cdot \frac{21-19}{100} = 0{,}5.$ Ответ: 0,5.

Задача 5.3.

В зубчатой передаче большая из шестеренок делает в минуту на 60 оборотов меньше, чем другая, а время, за которое каждая из них делает 6 оборотов, отличается на 1 с. Сколько оборотов делает каждая шестеренка в минуту?

Решение. Пусть x (об/мин) – количество оборотов, которое делает большая шестеренка в минуту (частота обращения с (об/мин)), тогда меньшая делает в минуту $x + 60$ (об/мин). Имеем следующую таблицу:

с (об/мин)	t (мин)	A (об)
x	t	6
x+60	t - 1/60	6

Необходимо определить x и x + 60. Имеем систему из двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} xt = 6, \\ (x+60)(t-1/60) = 6, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{6}{x}, \\ 60t - \dfrac{x}{60} - 1 = 0, \end{cases}$$

$x^2 + 60x - 6 \cdot 60^2 = 0$, $x = 120$. Ответ: 180 об/мин, 120 об/мин.

Задача 5.4. При вращении двух колес, соединенных ременной передачей, большее из них делает в минуту на 300 оборотов меньше другого, а время, за которое оно делает один оборот, на 4/15 с больше, чем время оборота другого колеса. Сколько оборотов делает большее колесо в минуту?

Решение. Пусть x (об/с) – количество оборотов, которое делает большее колесо в секунду (частота обращения с (об/с)), тогда меньшее делает в секунду $x+5$(об/с). Имеем следующую таблицу:

с (об/с)	t (с)	A (об)
x	t	1
x+5	t – 4/15	1

Необходимо определить 60x. Имеем систему из двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} xt = 1, \\ (x+5)(t-4/15) = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{1}{x}, \\ 5t - \dfrac{4x}{15} - \dfrac{20}{15} = 0, \end{cases}$$

$4x^2 + 20x - 15 \cdot 5 = 0$, $x = 2{,}5$, $60x = 150$. Ответ: 150 об.