ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
Центр довузовской подготовки

ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНЫЙ ЭКЗАМЕН
для учащихся инженерных классов (11 класс) города Москвы

Мастер-класс «Решение задач по математике теоретической части предпрофессионального экзамена»

Автор: **Власова Е.А.**, к.ф.-м.н., доцент кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана

Москва 2017

Предпрофессиональный экзамен

1. Теоретическая часть:

направлена на выявление базовых знаний учащихся инженерных классов по общеобразовательным предметам: **математика, физика, информатика** (автоматизированная проверка знаний на компьютере);

2. Практическая часть:

направлена на умение применять теоретические знания в решении разноплановых ситуационных задач или реализации базовых знаний в подготовке и защите долгосрочного научно-исследовательского проекта (решение ситуационной задачи в аудитории или защита научно-исследовательского проекта на кафедре, соответствующей тематики проекта).

Теоретическая часть – компьютерная проверочная работа

Каждому учащемуся инженерного класса предоставляется:

- автоматизированное рабочее место;
- электронный модуль проверки сформированной экзаменационной работы в автоматическом режиме из банка заданий при регистрации участника в электронной базе;
- получение результатов сразу после проведения работы в автоматическом режиме.

Условия проведения и время выполнения проверочной работы

- Теоретическая часть предпрофессионального экзамена проводится в форме компьютерного тестирования.
- При выполнении работы обучающиеся могут пользоваться непрограммируемым калькулятором.
- На выполнение теоретической части экзаменационной работы отводится **60 минут**.

Содержание и структура проверочной работы

- В работу включены расчетные задачи с инженерно-техническим содержанием, межпредметные задания на анализ текстовой, знакосимвольной и графической информации, базирующиеся на элементах содержания курсов физики, информатики и математики базового, повышенного и высокого уровней сложности.
- Вариант экзаменационной работы, представляемый каждому обучающемуся, автоматически формируется из базы проверочных заданий в соответствии с планом экзаменационной работы и состоит из **12 заданий.**

Система оценивания отдельных заданий и работы в целом

- За правильное выполнение заданий выставляется **1, 2 или 3** балла в соответствии с приведенной системой оценивания.
- Задание на 1 балл считается выполненным, если ответ учащегося совпал с эталоном.
- При оценивании заданий на 2 или 3 балла по одному баллу выставляется за каждый совпавший с эталоном элемент ответа.
- Максимальный балл за выполнение всей работы – **20 баллов.**
- При переводе в 40-балльную шкалу полученные баллы удваиваются.

План демонстрационного варианта теоретической части экзаменационной работы

№ за-да-ния	Умения, проверяемые на основе нижеприведённого межпредметного содержания	Макс. балл
1	Проведение логических рассуждений для нахождения характеристик событий	1
2	Использование знаково-символьных моделей при решении задач	1
3	Использование знаково-символьных моделей при решении задач	2
4	Проведение экстремальных оценок	3
5	Использование знаково-символьных моделей при решении задач	1
6	Преобразование модели из одной системы представления в другую	2
7	Использование явно заданной информации для проведения расчетов	3
8	Проведение расчётов параметров кинематического устройства	1
9	Анализ графической информации	2
10	Решение задач на индукционное представление информации	1
11	Использование знаково-символьных моделей при решении задач	2
12	Использование явно заданной информации для проведения расчетов	1

Демонстрационный вариант теоретической части экзамена

1 На соревнованиях беговых роботов было представлено некоторое количество механизмов. Роботов выпускали на одну и ту же дистанцию попарно. В протоколе фиксировались разности времен финиша победителя и побежденного в каждом из забегов. Все они оказались разными: 1 сек., 2 сек., 3 сек., 4 сек., 5 сек., 6 сек. Известно, что в ходе забегов каждый робот соревновался с каждым ровно один раз. Определите число представленных на соревнованиях механизмов.

Ответ: ______________.

2 Студент написал программу, в которой исполнитель **Прыгун** может совершать прыжки двух типов. Так, стартовав из точки A (1; 6; 3) прыжком первого типа, **Прыгун** попадает в точку B (1; 2; – 3), а из точки B прыжком второго типа попадает в точку C (1; 0; – 7). Найдите модуль перемещения **Прыгуна**, последовательно совершившего два прыжка первого типа и прыжок, противоположный прыжку второго типа.

Ответ: ______________.

3 При изучении характера движения тел на экспериментальной установке студент получил данные по изменению координат для двух частиц, движущихся вдоль оси Ох, и записал их в таблицу:

	Время начала движения, с	Продолжительность движения, с	Закон изменения координаты (время отсчитывается от начала движения первой частицы)
Первая частица	0	12	$x_1 = \log_2(13-t)$
Вторая частица	0,5	15	$x_2 = \sqrt{2t-1}$.

Через какое время после начала движения первой частицы можно прогнозировать встречу частиц? В точке с какой координатой они должны встретиться?

Ответ:

Время встречи	Координата точки встречи

4 В логистике затраты на доставку некоторого оборудования складываются из затрат на транспорт и хранение, которые определяются факторами a и b. Эти факторы могут принимать любые неотрицательные значения. Какие наименьшие затраты можно заложить на доставку оборудования по полученному заказу, если зависимость этих затрат задается формулой $2a^2 + 4b^2 - 2a + 5$? Чему при этом равно значение факторов?

Ответ:

Наименьшие затраты	Значение фактора транспорта	Значение фактора хранения

5 При испытаниях новой модели дрона массой 5 кг разработчики установили датчик, позволяющий определять характеристики движения. В некоторый момент времени при криволинейном движении дрона под действием силы в 20 Н нормальное ускорение составило угол 30 градусов с вектором силы. Какое тангенциальное ускорение было при этом зафиксировано?

Ответ: __________м/с^2.

6 Играя в интерактивный квест, команда должна была открыть сейф с цифровым кодовым замком. Найдя подсказки, команда выяснила, что кодом является минимальное нечётное четырёхзначное число в девятеричной системе счисления, троичная запись которого содержит одну двойку и три значащих нуля. Команда справилась с заданием. Какое значение кода она получила? Ответ приведите в троичной и девятеричной системах счисления.

Ответ:

Троичная система	Девятеричная система

Демонстрационный вариант теоретической части экзамена

7 В кибернетике используется понятие информационной энтропии, которая определяется формулой $H = -\sum_i p_i \log_2 p_i$,

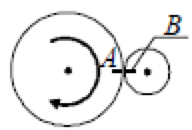
где H - информационная энтропия, p_i - вероятность каждого из возможных исходов.

В корзине лежат 32 клубка шерсти, из них 16 красных, 8 синих и 8 зеленых. Какова информационная энтропия сообщения о том, что случайно выбран 1 клубок? Какова вероятность того, что клубок оказался синим? Сколько бит информации несет сообщение о том, что клубок синий?

Ответ:

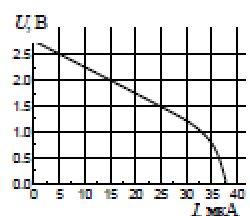
Информационная энтропия	Вероятность	Количество информации, бит

8 Две шестерни с радиусами $R_1 = 8$ см и $R_2 = 3$ см находятся в зацеплении друг с другом. Большая из них вращается с угловой скоростью $\omega_1 = 3\pi$ рад/с. В некоторый момент времени метки A и B, поставленные на шестернях совпадают. Определите минимальное время τ (в секундах), через которое метки опять совпадут.



Ответ: ________________с.

9 На рисунке приведен график зависимости напряжения U на клеммах солнечной батареи микрокалькулятора от протекающего через источник тока I. Найдите ЭДС батареи. Какой ток I_1 (в мкА) будет протекать через резистор сопротивлением $R = 60$ кОм, если его подключить к такой батарее?



Ответ:

ЭДС солнечной батареи, В	Ток I_1, мкА

10 Поток из 100 студентов сдавал экзамены. 85 студентов сдали английский язык, 73 студента сдали немецкий язык, 10 студентов не сдали ни одного экзамена. Какое количество студентов сдало экзамены и по английскому, и по немецкому языкам?

Ответ: _____________.

11 Работая по проекту повышения КПД тепловых двигателей, студент предложил виртуальную модель, в которой в качестве рабочего тела используется кислород, совершающий замкнутый цикл. Цикл состоит из изотермического увеличения объема в 2 раза, изобарического сжатия до прежнего объема и изохорического нагревания до первоначального давления. Для расчета работы газа при расширении студент записал функцию $p = \frac{k}{V}$ и воспользовался формулой Ньютона-Лейбница. Чему равен коэффициент k? Какое значение работы (в джоулях) было получено, если первоначальные параметры 1 г кислорода (можно принять за идеальный газ) составляли 1 л и 0,2 МПа?

Ответ:

Коэффициент k	Работа, Дж

12 Космический зонд выведен на околоземную орбиту. Он регистрирует количество высокоэнергетических протонов в околоземном пространстве, попадающих на его датчики, путем добавления в память сумматора зарегистрированного количества протонов каждую секунду. Каждый час, начиная с 01.00, передает это количество на Землю в Центр Управления Полетом. За 1 января 2017 года ЦУП от спутника получил следующий набор данных: 20512, 20612, 20662, 20692, 20699, 20753, 20756, 20759, 20766, 20777, 20777, 20781, 20789, 20790, 20811, 20812, 20819, 20821, 20832, 20835, 20842, 20849, 20853, 20891. Сколько частиц зарегистрировал спутник за период времени с 6 утра до 6 вечера включительно 1 января 2017?

Ответ: ________________.

Задание №1. Логическая задача

Модельная задача

Пусть на плоскости даны n $(n \geq 3)$ различных точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Сколько всего можно провести прямых, каждая из которых проходит через две из данных точек?

Решение. Каждой такой прямой соответствует неупорядоченная пара точек (прямая AB совпадает с прямой BA), через которую она проходит. Через любую из n точек можно провести $n-1$ прямую, соединяющую эту точку с остальными точками, получим $(n-1)n$. При таком подсчете каждая прямая повторяется два раза.

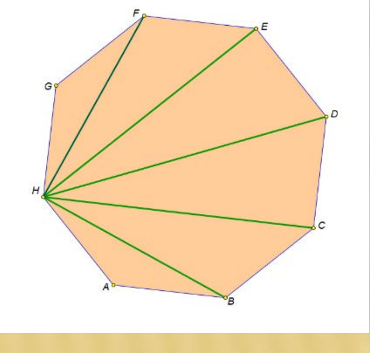
Число прямых равно $\frac{(n-1)n}{2}$.

Задание №1. Логическая задача

• В шахматном турнире в один круг играют n игроков. Сколько всего они провели встреч?

• Можно ли 15 телефонов соединить между собой так, чтобы каждый из них был связан ровно с 11 другими?

• Встретились n друзей и обменялись рукопожатиями. Сколько всего было рукопожатий?

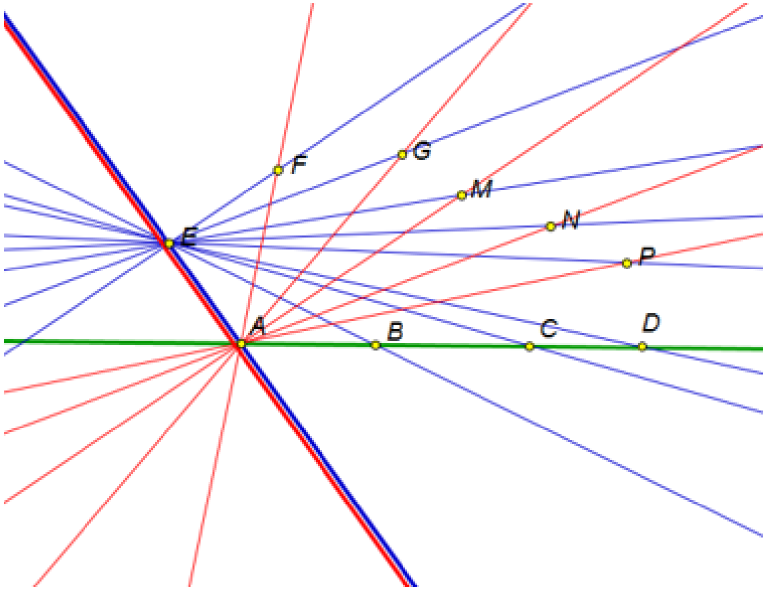


• Сколько всего диагоналей у выпуклого многоугольника, имеющего n сторон?

Задание №1. Логическая задача

Задача. На плоскости даны 10 точек, из которых ровно четыре лежат на одной прямой, а из остальных никакие три не лежат на одной прямой. Сколько всего можно провести прямых, каждая из которых проходит или через две, или через четыре из данных точек?

Решение. Пусть *A, B, C, D* – точки, которые лежат на одной прямой. Тогда через каждую из шести точек, не совпадающих с *A, B, C, D* можно провести 9 прямых. Через каждую из точек *A, B, C, D* можно провести шесть различных прямых, не считая ту, на которой лежат эти четыре точки. С учетом, что каждую из перечисленных прямых посчитали дважды, добавив прямую *AB*, получаем $(6 \cdot 9 + 4 \cdot 6)/2 + 1 = 40$.



Задание №1. Комбинаторная задача

Модельная задача

Пусть на плоскости даны n $(n \geq 3)$ различных точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Сколько всего можно провести прямых, каждая из которых проходит через две из данных точек?

Решение. Необходимо определить **число сочетаний** из n элементов (точек) по два (через любую пару точек без учета порядка проходит одна прямая). Воспользуемся формулой

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!\,m!}, \qquad C_n^2 = \frac{n!}{(n-2)!\,2!} = \frac{(n-1)n}{2}$$

Число прямых равно $\frac{(n-1)n}{2}$.

Решение задания №1 демонстрационного варианта

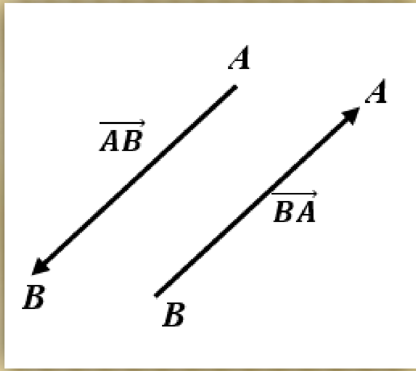
Задание 1. На соревнованиях беговых роботов было представлено некоторое количество механизмов. Роботов выпускали на одну и ту же дистанцию попарно. В протоколе фиксировались разности времен финиша победителя и побежденного в каждом из забегов. Все они оказались разными: 1 сек., 2 сек., 3 сек., 4 сек., 5 сек., 6 сек. Известно, что в ходе забегов каждый робот соревновался с каждым ровно один раз. Определите число представленных на соревнованиях механизмов.

Решение. Пусть на соревнования было представлено n роботов. Так как для каждой пары роботов показания измерений оказались разными, то всего было 6 различных пар. С другой стороны, число пар которое можно составить из роботов равно $\frac{(n-1)n}{2}$. Следовательно, $\frac{(n-1)n}{2} = 6$, или $n^2 - n - 12 = 0$, $n = 4$. Ответ: 4.

Задание №2. Операции над векторами

Направленным отрезком или **геометрическим вектором** называют отрезок, концы которого упорядочены. Первый из его концов называют началом, второй – концом. При этом говорят, что указано **направление** отрезка.

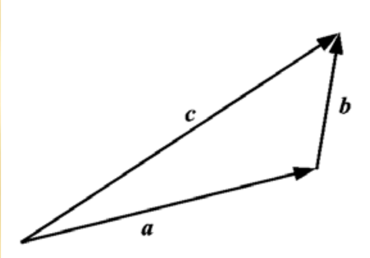
Два геометрических вектора называют **равными**, если эти векторы коллинеарны, имеют одинаковую длину и являются однонаправленными.



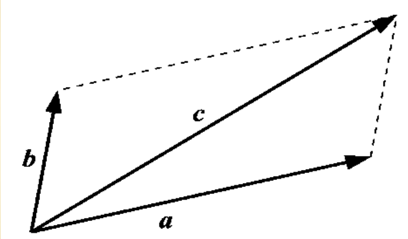
Свободным вектором или просто **вектором** называют множество всех равных геометрических векторов.

Линейные операции над векторами

Сложение векторов: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

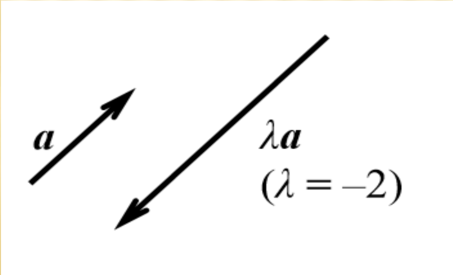


- Правило треугольника



- Правило параллелограмма

Произведение вектора $\vec{a}$ на число λ : $\overrightarrow{\lambda a} = \vec{c}$



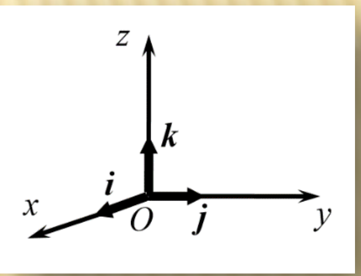
Свойства линейных операций над векторами

Свойства линейных операций над векторами:

- Сложение коммутативно: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
- Сложение ассоциативно: $\vec{a} + (\vec{b} + \overrightarrow{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.
- $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.
- Умножение вектора на число ассоциативно: $(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a})$.
- Дистрибутивность: $(\lambda_1 + \lambda_2)\vec{a} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{a}$.
- Дистрибутивность: $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$.
- $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.
- Вектор $-\vec{a}$, противоположный вектору $\vec{a}$, можно представить в виде: $-\vec{a} = (-1) \cdot \vec{a}$.

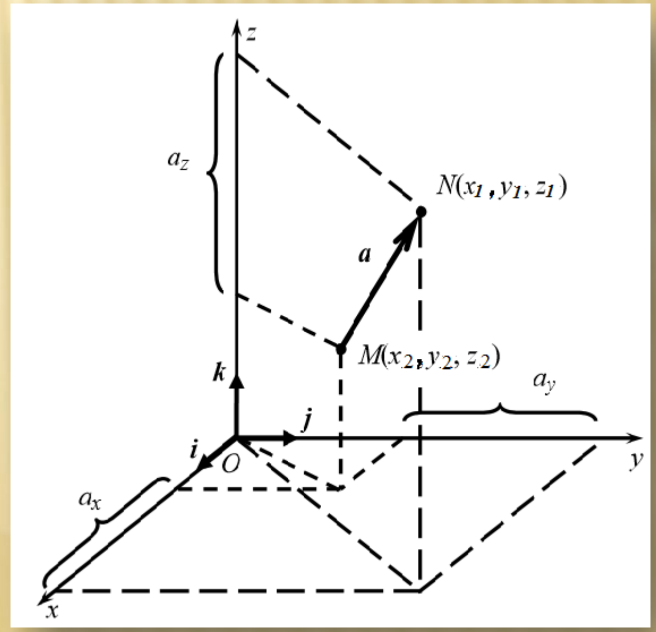
Координатное представление векторов

Любой вектор $\vec{a}$ пространства может быть разложен по ортонормированному базису $\{\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$:



$$\vec{a}=a_x\boldsymbol{i} + a_y\,\boldsymbol{j} + a_z\,\boldsymbol{k},$$

где a_x, a_y, a_z – **координаты** вектора $\vec{a}$ в этом базисе.



Если вектор $\vec{a} = \overrightarrow{MN}$, причем $M(x_1, y_1, z_1)$, $N(x_2, y_2, z_2)$, то **координаты** a_x, a_y, a_z вектора $\vec{a}$ находят по формулам:

$$a_x = x_2 - x_1,\ a_y = y_2 - y_1,\ a_z = z_2 - z_1.$$

Координатное представление векторов

При **сложении** векторов $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ и $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$ их соответствующие **координаты складываются**:

$$\vec{a} + \vec{b} = \{a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z\}.$$

При **умножении** вектора **на число** все его **координаты умножаются на это число**:

$$\lambda\vec{a} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}.$$

Длину вектора $\vec{a}$ вычисляют по формуле:

$$|\vec{a}| = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}.$$

Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними, и обозначают символом $\vec{a} \cdot \vec{b}$ или $(\vec{a}, \vec{b})$.

Если угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен φ, то имеем формулу

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi.$$

Основные свойства скалярного произведения:

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (свойство коммутативности);

2) $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \geq 0$, $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

3) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ (свойство дистрибутивности);

4) $\overrightarrow{\lambda a} \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$ (свойство ассоциативности).

Вычисление скалярного произведения в декартовой системе координат

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами в ортонормированном базисе $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$: $\boldsymbol{\vec{a}}=\{\boldsymbol{a_x}, \boldsymbol{a_y}, \boldsymbol{a_z}\}$, $\boldsymbol{\vec{b}}=\{\boldsymbol{b_x}, \boldsymbol{b_y}, \boldsymbol{b_z}\}$.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вычисляют по формуле

$$\boldsymbol{\vec{a}} \cdot \boldsymbol{\vec{b}}=\boldsymbol{a_x b_x} + \boldsymbol{a_y b_y} + \boldsymbol{a_z b_z}.$$

Длину вектора $\vec{a}$ вычисляют по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}.$$

Косинус угла между ненулевыми векторами вычисляют по формуле

$$\cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2} \cdot \sqrt{{b_x}^2 + {b_y}^2 + {b_z}^2}},$$

где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Решение типовых заданий

Задача 1. Даны точки A (1; 5; 3), B (1; 2; –3) и C (1; 1; 0). Найдите координаты вектора $\vec{m} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$ и запишите в ответ их сумму.

Решение. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$:

$\overrightarrow{AB} = \{1-1, 2-5, -3-3\} = \{0, -3, -6\}$, $\overrightarrow{BC} = \{1-1, 1-2, 0-(-3)\} = \{0, -1, 3\}$.

Имеем $\vec{m} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} = \{0 + 3\cdot 0,\ (-3) + 3\cdot(-1),\ (-6) + 3\cdot 3\} = \{0, -6, 3\}$

Сумма координат вектора $\vec{m}$ равна -3. Ответ: -3.

Задача 2. Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами в ортонормированном базисе: $\vec{a}$=$\{-3, -1, 1\}$, $\vec{b}$=$\{-5, 0, 3\}$. Найдите длину вектора $\vec{m} = \vec{a} - \vec{b}$.

Решение. Найдем координаты вектора $\vec{m} = \vec{a} - \vec{b}$:

$\vec{m} = \{-3-(-5), -1-0, 1-3\} = \{2, -1, -2\}$, $|\vec{m}| = \sqrt{\vec{m}\cdot\vec{m}} = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = 3$. Ответ: 3.

Задача 3. Даны точки A (1; 1; –3), B (2; 2; –1) и C (1; 1; 1). Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CA}$.

Решение. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CA}$:

$\overrightarrow{AB} = \{2-1, 2-1, -1-(-3)\} = \{1, 1, 2\}$, $\overrightarrow{CA} = \{1-1, 1-1, -3-1\} = \{0, 0, -4\}$.

Имеем $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA} = 1\cdot 0 + 1\cdot 0 + 2\cdot(-4) = -8$. Ответ: -8.

Задача 4. Даны точки A (1; –1; –3), B (–1; 1; –2) и C (3; 4; –2). Найдите косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CB}$.

Решение. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CB}$:

$\overrightarrow{AB} = \{-1-1, 1-(-1), -2-(-3)\} = \{-2, 2, 1\}$, $\overrightarrow{CB} = \{-1-3, 1-4, -2-(-2)\} = \{-4, -3, 0\}$.

Находим косинус угла φ между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CB}$: $\cos\varphi = \frac{(-2)\cdot(-4)+2\cdot(-3)+1\cdot 0}{\sqrt{(-2)^2+2^2+1^2}\cdot\sqrt{(-4)^2+(-3)^2+0^2}} = \frac{2}{15}$. Ответ: $\frac{2}{15}$.

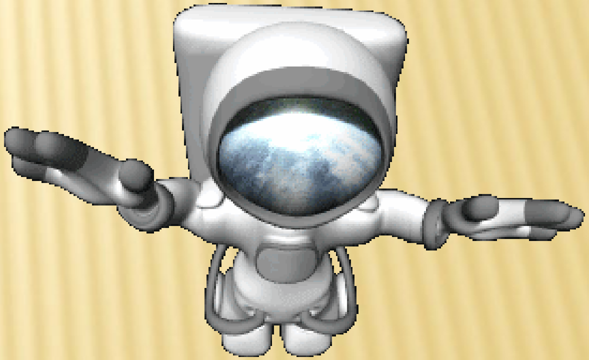
Задача 5. Найдите длину вектора $\vec{a} = 3\vec{c} - 2\vec{b}$ при условии, что $|\vec{c}| = 5$, $|\vec{b}| = 4$, а угол φ между векторами $\vec{c}$ и $\vec{b}$ равен 60°.

Решение. Поскольку $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$, то, вычислим скалярный квадрат вектора $\vec{a}$, пользуясь формулой (2.3.5) и основными свойствами скалярного произведения. Имеем $\vec{a}^2 = (3\vec{c}-2\vec{b})(3\vec{c}-2\vec{b}) = 9\vec{c}^2 - 12\vec{c}\cdot\vec{b} + +4\vec{b}^2 = 9|\vec{c}|^2 - 12|\vec{c}||\vec{b}|\cos\varphi + +4|\vec{b}|^2 = 9\cdot 25 - 12\cdot 5\cdot 4\cdot 0{,}5 + 4\cdot 16 = 225 - 120 + 64 = 169$.

Следовательно, $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = 13$. Ответ: 13.

Решение задания №2 демонстрационного варианта

Задание 2. Студент написал программу, в которой исполнитель **Прыгун** может совершать прыжки двух типов. Так, стартовав из точки А (1; 6; 3) прыжком первого типа, **Прыгун** попадает в точку В (1; 2; – 3), а из точки В прыжком второго типа попадает в точку С (1; 0; – 7). Найдите модуль перемещения **Прыгуна**, последовательно совершившего два прыжка первого типа и прыжок, противоположный прыжку второго типа.



Решение. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$:

$\overrightarrow{AB} = \{1-1, 2-6, -3-3\} = \{0, -4, -6\}$,

$\overrightarrow{BC} = \{1-1, 0-2, -7-(-3)\} = \{0, -2, -4\}$.

Рассчитаем вектор перемещения **Прыгуна**

$\vec{m} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \{2\cdot 0 - 0, 2\cdot(-4)-(-2), 2\cdot(-6)-(-4)\} = \{0, -6, -8\}$

Найдем длину перемещения

$|\vec{m}| = \sqrt{\vec{m}\cdot\vec{m}} = \sqrt{0^2 + (-6)^2 + (-8)^2} = 10.$ Ответ: 10.

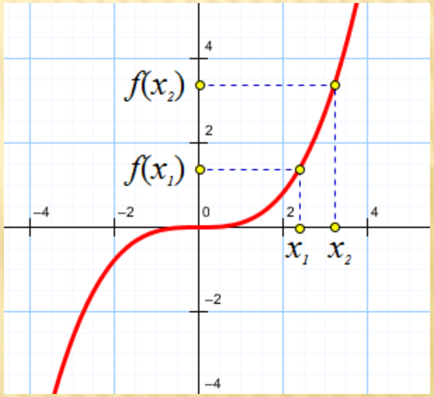
Задание №3. Использование свойств функций при решении задач

При решении уравнений можно использовать следующие свойства функций:

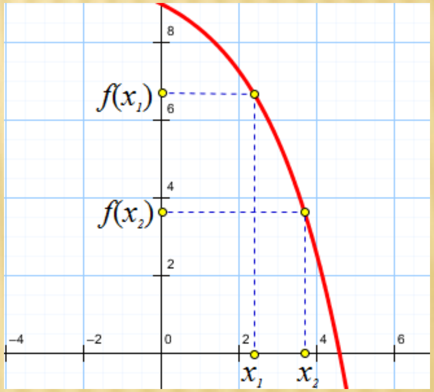
- монотонность;
- ограниченность;
- непрерывность;
- периодичность;
- четность.

Использование свойства монотонности функций при решении уравнений

- Функцию $f(x)$ называют **возрастающей** на промежутке D, если для любых чисел x_1 и x_2 из промежутка D таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.



- Функцию $f(x)$ называют **убывающей** на промежутке D, если для любых чисел x_1 и x_2 из промежутка D таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

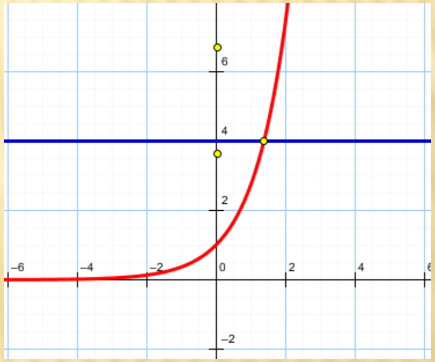


- Если функция возрастает или убывает на некотором промежутке, то ее называют **строго монотонной** на этом промежутке.

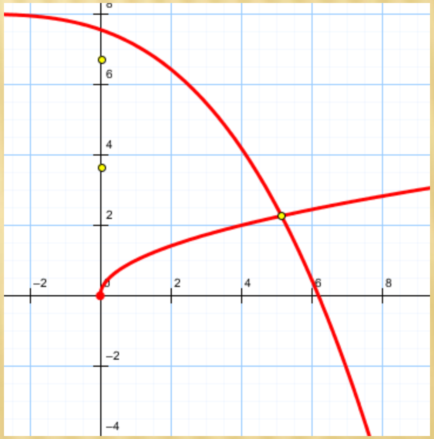
Использование свойства монотонности функций при решении уравнений

- Если на некотором промежутке функция *f*(*x*) возрастает (или убывает), то уравнение

  f*(*x*) = *a на этом промежутке имеет ***единственный корень, либо не имеет корней*** (*a* — постоянная величина (число)).



- Если на некотором промежутке функция *f*(*x*) возрастает, а функция *g*(*x*) убывает (либо наоборот), то уравнение ***f*(*x*)=*g*(*x*)** на этом промежутке имеет ***единственный корень, либо не имеет корней***.



Свойства монотонных функций

Свойства монотонных функций

Пусть функции определены на некотором промежутке D.

- Сумма возрастающих функций — возрастающая функция. Сумма убывающих функций — убывающая функция.
- Прибавление или вычитание постоянной величины не влияет на монотонность функции. Если к возрастающей функции прибавить (или вычесть) постоянную величину, получим возрастающую функцию. Если к убывающей функции прибавить (или вычесть) постоянную величину, получим убывающую функцию.
- Если функция f возрастает, то функция cf $(c > 0)$ также возрастает, а функция cf $(c < 0)$ убывает. Если функция f убывает, то функция cf $(c > 0)$ также убывает, а функция cf $(c < 0)$ возрастает. Здесь c – некоторая константа.
- Произведение неотрицательных возрастающих функций есть возрастающая функция. Произведение неотрицательных убывающих функций есть убывающая функция.
- Если функция f возрастает и сохраняет знак, то функция $1/f$ убывает.
- Если функция f возрастает (убывает) и n – нечетное число, то f^n также возрастает (убывает).
- Композиция $g(f(x))$ возрастающих функций f и g также возрастает.
- Композиция $g(f(x))$ убывающих функций f и g возрастает.
- Композиция $g(f(x))$ возрастающей функций f и убывающей g убывает.
- Композиция $g(f(x))$ убывающей функций f и возрастающей g убывает.

Возрастающие функций

Перечислим некоторые элементарные функции, возрастающие на всей области определения, либо на отдельных промежутках, входящих в область определения ($k > 0$, $b \geq 0$, n — натуральное число):

$$y = kx \pm b, y = -\frac{k}{x}, y = -\frac{k}{x^{2n+1}},$$

$$y = x^3, y = x^{2n+1},$$

$$y = a^x (a > 1), y = \log_a x (a > 1),$$

$$y = -a^x (0 < a < 1), y = -\log_a x (0 < a < 1),$$

$$y = \sqrt{kx \pm b}, y = -\sqrt{b - kx},$$

$$y = \sqrt[n]{kx \pm b},\ y = -\sqrt[n]{b - kx},$$

$y = \operatorname{tg} x$ (на любом промежутке $(-\pi/2 + \pi n, \pi/2 + \pi n), n \in Z$),

$y = -\operatorname{ctg} x$ (на любом промежутке $(\pi n,\ \pi + \pi n), n \in Z$),

$$y = \operatorname{arctg} x,\quad y = \arcsin x,$$

$$y = -\operatorname{arcctg} x,\quad y = -\arccos x.$$

Убывающие функций

Перечислим некоторые элементарные функции, убывающие на всей области определения, либо на отдельных промежутках, входящих в область определения ($k > 0$, $b \geq 0$, n — натуральное число):

$$y = -kx \pm b, y = \frac{k}{x}, y = \frac{k}{x^{2n+1}},$$

$$y = -x^3, y = -x^{2n+1},$$

$$y = a^x (0 < a < 1), y = \log_a x (0 < a < 1),$$

$$y = -a^x (a > 1), y = -\log_a x (a > 1),$$

$$y = \sqrt{b - kx}, y = -\sqrt{kx \pm b},$$

$$y = -\sqrt[n]{kx \pm b}, \ y = \sqrt[n]{b - kx},$$

$y = \operatorname{ctg} x$ (на любом промежутке $(\pi n, \ \pi + \pi n\ ), n \in Z$),

$y = -\operatorname{tg} x$ (на любом промежутке $(-\pi/2 + \pi n, \pi/2 + \pi n), n \in Z$),

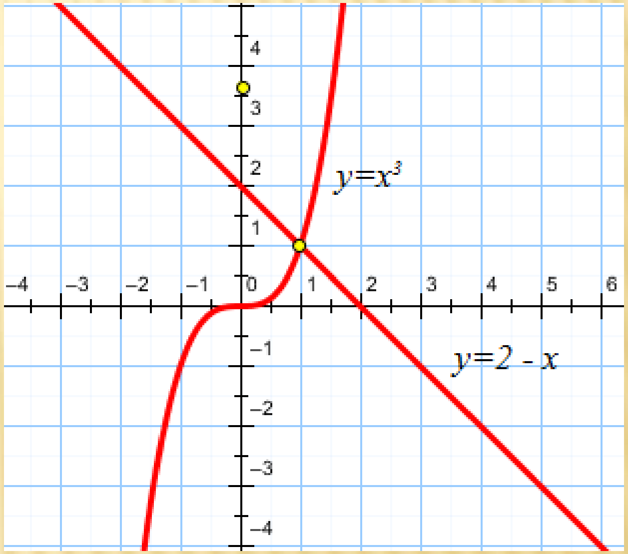
$$y = \operatorname{arcctg} x, \ y = \arccos x,$$

$$y = -\operatorname{arctg} x, \ \ y = -\arcsin x.$$

Примеры решений уравнений

Задача 1. Решите уравнение: $\boldsymbol{x^3 = 2 - x}$.

Решение. Рассмотрим функции $f(x) = x^3$ и $g(x)=2 - x$. Функция $f(x)$ *возрастает* на всей области определения, а функция $g(x)$ *убывает* на области определения. Данное уравнение имеет не более одного корня. Подбором находим, что $x = 1$. Проверкой убеждаемся, что $x = 1$ действительно корень уравнения.



Ответ: 1.

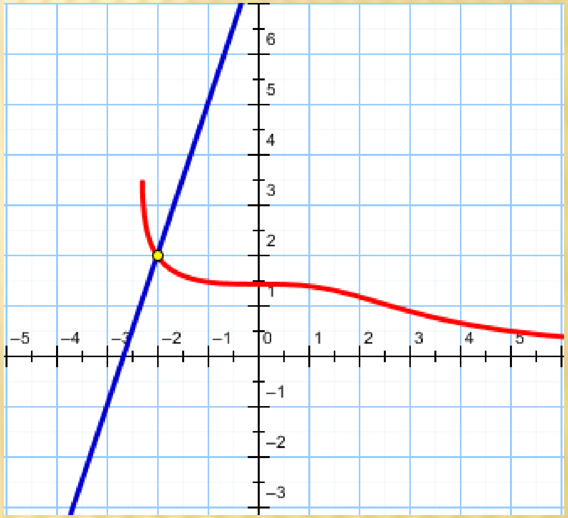
Примеры решений уравнений

Задача 2. Решите уравнение: $\sqrt{x^3+24} = 3x + 8 + \sqrt{x^3+12}$.

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$\sqrt{x^3+24} - \sqrt{x^3+12} = 3x + 8.$$

Умножим и разделим левую часть уравнения на сопряженное до разности квадратов,



получим $\frac{12}{\sqrt{x^3+24}+\sqrt{x^3+12}} = 3x + 8.$

Левая часть уравнения есть *убывающая* функция, а правая – *возрастающая*, значит, уравнение не может иметь более одного корня. Подбором находим: *x*= – 2. Ответ: – 2.

Решение задания №3 демонстрационного варианта

Задание 3. При изучении характера движения тел на экспериментальной установке студент получил данные по изменению координат для двух частиц, движущихся вдоль оси Ох, и записал их в таблицу:

	Время начала движения, с	Продолжительность движения, с	Закон изменения координаты (время отсчитывается от начала движения первой частицы)
Первая частица	0	12	$x_1 = \log_2(13 - t)$
Вторая частица	0,5	15	$x_2 = \sqrt{2t - 1}$

Через какое время после начала движения первой частицы можно прогнозировать встречу частиц? В точке с какой координатой они должны встретиться?

Решение. Для нахождения времени встречи частиц необходимо решить уравнение $\log_2(13 - t)=\sqrt{2t - 1}$. Областью допустимых значений уравнения является временной промежуток $[0,5; 12]$, что соответствует условию задачи.

Решение задания №3 демонстрационного варианта

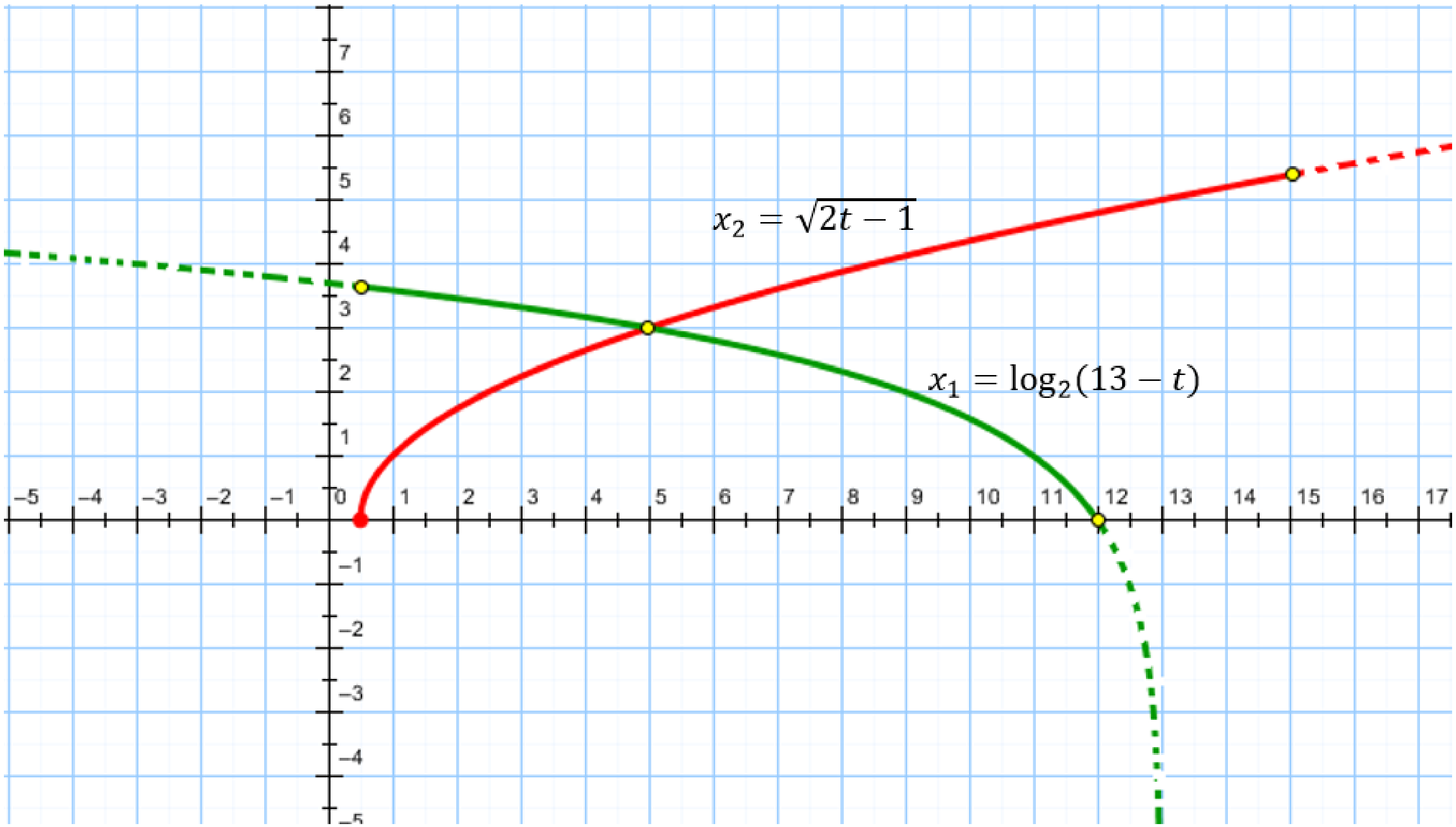
Функция $x_1 = \log_2(13 - t)$ убывает на этом промежутке, поскольку является композицией убывающей линейной и возрастающей логарифмической функций.

Функция $x_2 = \sqrt{2t - 1}$ возрастает на этом промежутке, поскольку является композицией двух возрастающих функций.

Уравнение $\log_2(13 - t)$=$\sqrt{2t - 1}$ на отрезке $[0{,}5; 12]$ имеет не более одного решения.

Методом подбора определяем это решение: $t = 5$, при этом координата точки встречи частиц $x = 3$.

Решение задания №3 демонстрационного варианта



Ответ:

Время встречи	Координата точки встречи
5	3

Задание №4. Экстремальные задачи

Экстремальные задачи или **задачи на оптимизацию** – задачи на нахождение наибольшего и наименьшего значения величин, зависящих от одного или нескольких параметров.

Методы решения:

- без применения производной, с помощью проведения алгебраических преобразований и использования свойств основных элементарных функций;
- с применением производной.

Выделение полного квадрата

В основе ***метода выделения полного квадрата*** лежат следующие формулы сокращенного умножения

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Выражения $(a+b)^2$ и $(a-b)^2$ называют ***полными квадратами***.

Пусть дан квадратный трехчлен ax^2+bx+c, где $a \neq 0$. Его требуется преобразовать к виду $a(x+m)^2+n$, где m и n - некоторые числа. Этот прием и называют выделением полного квадрата. Для этого проведем следующие преобразования

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2 + 2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c =$$

$$= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c.$$

Проведение экстремальных оценок

<u>Модельная задача.</u> Пусть a, b – произвольные действительные числа. Какое наибольшее значение может принимать выражение $6 - 4a^2 - 2b^2 - 8a + 2b$?

Решение. Приведем данное выражение к виду $6 - (4a^2 + 8a) - (2b^2 - 2b)$, заключив в скобки одночлены, содержащие одинаковые буквы. В каждом выражении в скобках выделим полный квадрат:

$$4a^2 + 8a = 4(a^2 + 2a + 1 - 1) = 4(a+1)^2 - 4,$$

$$2b^2 - 2b = 2\left(b^2 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot b + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = 2\left(b - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}.$$

Таким образом,

$$6 - (4a^2 + 8a) - (2b^2 - 2b) = 6 - 4(a+1)^2 + 4 - 2\left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} =$$

$$= 10{,}5 - 4(a+1)^2 - 2\left(b - \frac{1}{2}\right)^2 \le 10{,}5,$$

Последняя оценка следует из неравенств $4(a+1)^2 \ge 0$ и $2\left(b - \frac{1}{2}\right)^2 \ge 0,$ которые выполняются для любых действительных чисел a и b. Причем равенство достигается при $a = -1$ и $b = 0{,}5$.

Ответ: 10,5.

Решение задания №4 демонстрационного варианта

В логистике затраты на доставку некоторого оборудования складываются из затрат на транспорт и хранение, которые определяются факторами a и b. Эти факторы могут принимать любые неотрицательные значения. Какие наименьшие затраты можно заложить на доставку оборудования по полученному заказу, если зависимость этих затрат задается формулой $2a^2+4b^2-2a+5$? Чему при этом равно значение факторов?

Решение. Для решения задачи необходимо найти наименьшее значение выражения $2a^2+4b^2-2a+5$ при неотрицательных значениях переменных a и b. Для этого воспользуемся методом выделения полного квадрата:

$$2a^2+4b^2-2a+5=2a^2-2a+4b^2+5=2\left(a^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot a+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)+4b^2+5=$$

$$=2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}+4b^2+5=2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+4b^2+4{,}5\geq 4{,}5,$$

причем равенство достигается при $a=0{,}5$ и $b=0$. Ответ:

Наименьшие затраты	Значение фактора транспорта	Значение фактора хранения
4,5	0,5	0

Примеры решения экстремальных задач без применения производной

Задача 1. Найдите наибольшее значение функции $y=\log_7(13-12x-x^2)+10$.

Решение. Используя метод выделения полного квадрата, преобразуем выражение $\log_7(13-12x-x^2)+10=\log_7(49-36-2\cdot 6x-x^2)=\log_7(49-(x+6)^2)$. Поскольку для любых действительных значений x верно неравенство $(x+6)^2\ge 0$, то $49-(x+6)^2\le 49$. Логарифмическая функция с основание большим единицы (основание равно 7) возрастает в области определения, и, следовательно, $\log_7(49-(x+6)^2)\le\log_7 49=2$, и $\log_7(49-(x+6)^2)+10\le 12$ для всех допустимых значений x. Таким образом. Наибольшее значение функции $y=\log_7(13-12x-x^2)+10$ равно 12, причем достигается это значение при $x=-6$. Ответ: 12.

Задача 2. Найдите множество значений функции $f(x)=\log_9\left(3-\left|2^{1-x^2+2x}-2\right|\right)$.

Решение. Функция $t=1-x^2+2x$ или $t=2-(x-1)^2$ принимает значения $t\in(-\infty;2]$. Функция $z=2^t$, где $t\in(-\infty;2]$ возрастает и принимает значения $z\in(0;4]$. Рассмотрим функцию $y=\log_9(3-|z-2|)$, определенную на полуинтервале $(0;4]$. Если $z\in(0;2]$, то $y=\log_9(1+z)$, и функция возрастает и принимает все значения из промежутка $(0;0{,}5]$. Если $z\in(2;4]$, то $y=\log_9(5-z)$, и функция убывает и принимает все значения из промежутка $[0;0{,}5)$. Объединяя полученные множества значений, получаем $E_f=[0;0{,}5]$. Ответ: $E_f=[0;0{,}5]$.

Задача 3. Найдите множество значений функции $f(x)=25\cdot 0{,}2^{(2-\log_7 x)\log_7 x}$.

Решение. Сделаем замену переменного: $t=\log_7 x$. Тогда имеем $y=25\cdot 0{,}2^{(2-t)t}=125\cdot 0{,}2^{1-(t-1)^2}$. Пусть $z=1-(t-1)^2\Rightarrow\ z\in(-\infty;1]$. Так как показательная функция с основанием $0{,}2<1$ убывает, и $y=25\cdot 0{,}2^z$, $z\in(-\infty;1]$, то $y\in[25\cdot 0{,}2;+\infty)=[5;+\infty)$. Ответ: $E(y)=[5;+\infty)$.

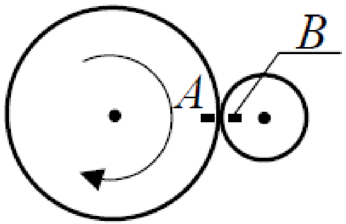
Задание №8. Текстовые задачи технического содержания

Решение сюжетной задачи технического содержания алгебраическим методом состоит в последовательной реализации трех этапов:

- перевод текста задачи на алгебраический язык – составление математической модели данной сюжетной задачи;
- решение полученной математической задачи – внутримодельное решение;
- ответ на вопрос задачи, перевод полученного результата на язык исходной ситуации – интерпретация внутримодельного решения.

Решение задания №8 демонстрационного варианта

Две шестерни с радиусами $R_1 = 8$ см и $R_2 = 3$ см находятся в зацеплении друг с другом. Большая из них вращается с угловой скоростью $\omega_1 = 3\pi$ рад/с. В некоторый момент времени метки A и B, поставленные на шестернях совпадают. Определите минимальное время τ (в секундах), через которое метки опять совпадут.



Решение. В данной модели точки A и B за одно и то же время проходят одинаковые расстояния. Совпадение меток на шестернях означает, что точки A и B совершили по нескольку полных кругов, т.е. путь, пройденной точкой A, составляет $S_A = 2\pi R_1 n,\ n \in N$, путь, пройденной точкой B, составляет $S_B = 2\pi R_2 k,\ k \in N$, причем $S_A = S_B$. Таким образом, имеем равенство $2\pi \cdot 8n = 2\pi \cdot 3k$, или $8n = 3k$. Для того чтобы время τ (в секундах), через которое метки опять совпадут, было минимальным необходимо, чтобы натуральные числа n и k в равенстве $8n = 3k$ были минимальными. Следовательно, $n = 3$, $k = 8$ (числа 3 и 8 взаимно просты). Таким образом, $S_A = 2\pi R_1 n = 6\pi R_1 = 48\pi$. По условию угловая скорость большей шестеренки $\omega_1 = 3\pi$ рад/с. Угловой скоростью при равномерном движении точки по окружности называют отношение угла $\Delta\varphi$ поворота радиус-вектора к промежутку времени Δt, за который этот поворот произошел, т.е. $\omega = \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}$. Если конец радиус-вектора прошел расстояние S, равное длине дуги окружности радиуса R, то угол поворота радиус-вектора будет равен $\Delta\varphi = \dfrac{S}{R}$ рад. Следовательно, верна формула $\omega\Delta t = \dfrac{S}{R}$, или $\Delta t = \dfrac{S}{R\omega}$. Для данной задачи имеем

$$\Delta t = \frac{S_A}{R_1\omega_1} = \frac{2\pi R_1 n}{R_1\omega_1} = \frac{2\pi n}{\omega_1} = \frac{6\pi}{3\pi} = 2 \text{ с.}$$

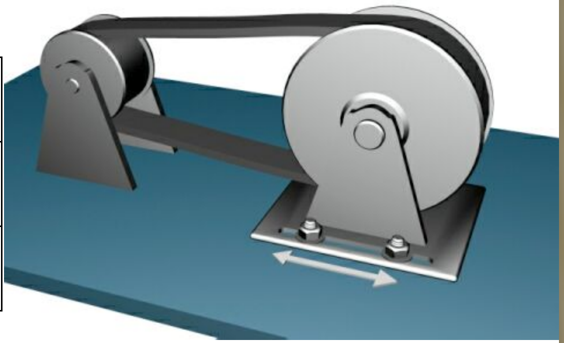
Ответ: 2 с.

Задача технического содержания

При вращении двух колес, соединенных ременной передачей, большее из них делает в минуту на 300 оборотов меньше другого, а время, за которое оно делает один оборот, на 4/15 с больше, чем время оборота другого колеса. Сколько оборотов делает большее колесо в минуту?

Решение. Пусть x (об/с) – количество оборотов, которое делает большее колесо в секунду (частота обращения с (об/с)), тогда меньшее делает в секунду $x+5$ (об/с). Имеем следующую таблицу:

с (об/с)	t (с)	A (об)
x	t	1
$x+5$	$t-4/15$	1



Необходимо определить $60x$. Имеем систему из двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} xt=1, \\ (x+5)(t-4/15)=1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\dfrac{1}{x}, \\ 5t-\dfrac{4x}{15}-\dfrac{20}{15}=0, \end{cases}$$

$4x^2+20x-15\cdot 5=0,\ \ x=2{,}5,\quad 60x=150.$ Ответ: 150 об.

Спасибо за внимание !